

논증과 추론

수 리 논 술

성균관대학교 수리논술

[1] 다음 <제시문1>~<제시문4>를 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

14 성균관대

<제시문1> 자연수 n 에 대하여 $n!$ 은 n 이하인 모든 자연수의 곱으로 정의한다. 즉,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

이며 $0! = 1$ 로 정의한다.

<제시문2> 자연수 n 과 $0 \leq k \leq n$ 에 대하여, 이항계수는 ${}_nC_k$ 는 n 개의 사물 중 k 개의 사물을 선택하는 방법의 수로 정의하며, 다음의 식으로 주어진다.

$${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

<제시문3> 자연수 n 에 대하여, 이항정리는 다음과 같다.

$$(x+y)^n = {}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + \cdots + {}_nC_n x^0 y^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^{n-k} y^k$$

<제시문4> 자연수 n 에 대하여, a_n 을 방정식 $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수 해의 순서쌍 (x,y,z) 의 개수로 정의한다.

(1) 자연수 n 이 1 또는 2인 경우, 방정식 $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z) 를 모두 나열하고, <제시문4>에 정의된 a_n 의 초기항 a_1 과 a_2 의 값을 각각 구하시오.

(2) 2이상인 자연수 n 에 대해 방정식 $x+y+z=n$ 을 만족하고 z 의 값이 1이상인, 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z) 의 개수가 a_{n-1} 과 같음을 보이고, 이를 이용하여 $a_n = a_{n-1} + n + 1$ 이 성립함을 논하시오.

(3) <제시문3>을 이용하여 부등식 $2^n \geq n+1$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립하는 이유를 논하시오.

(4) <제시문4>에서 정의된 a_n 은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $a_n \leq 2^{n+1}$ 을 만족한다. 그 이유를 문제 [수학1-ii],[수학1-iii]의 결과와 수학적 귀납법을 이용하여 논하시오.

[2] 다음 <제시문1>~<제시문4>를 읽고 [수학2-i]~[수학2-iv]를 문항별로 풀이와 함께
 14 성균관대 수시

<제시문1>

두 함수 $p(x)$, $q(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $p(x) \geq q(x)$ 일 때, 두 곡선 $y = p(x)$ 와 $y = q(x)$ 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_a^b \{p(x) - q(x)\} dx$ 이다.

<제시문2>

곡선 $y = x^2$ 을 C 라 한다. $a > 2$ 를 만족하는 실수 a 에 대하여, 점 P_a 의 좌표를 (a, a^2) 라고 정의한다.

<제시문3>

좌표평면 위의 두 점 O 와 A 는 각각 좌표 $O = (0, 0)$ 과 $A = (1, 0)$ 을 가진다.

[수학 2-i] 선분 $\overline{AP_a}$ 와 곡선 C 가 점 P_a 를 포함하여 두 점에서 만남을 보이시오. 이 중 P_a 가 아닌 다른 한 점을 Q_a 라고 할 때, 점 Q_a 의 좌표를 a 에 대한 식으로 나타내시오.

[수학 2-ii] 선분 $\overline{OP_a}$ 와 곡선 C 로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S_1(a)$ 라고 하자. $S_1(a)$ 를 <제시문1>을 이용하여 구하시오.

[수학 2-iii] 선분 $\overline{Q_aP_a}$ 와 곡선 C 로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S_2(a)$ 라고 하자.

$S_2(a) = \left(\frac{a}{a-1}\right)^3 \times g(a)$ 를 만족하는 a 에 관한 다항식 $g(a)$ 를 <제시문1>을 이용하여 구하시오.

[수학 2-iv] 문제 [수학2-ii]와 [수학2-iii]에서 정의된 $S_1(a)$ 와 $S_2(a)$ 에 대하여 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2(a)}{S_1(a)}$ 의 값을 추론하시오.

[3] 다음 <제시문1>~<제시문4>를 읽고 [수학1-i]~[수학1-iv]를 문항별로 풀이와 함께
답하시오. 14 성균관대 수시

<제시문1>

좌표평면의 부분집합 X 와 Y 에 대해 $X+Y$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$X+Y = \{\vec{a} + \vec{b} \mid \vec{a} \in X, \vec{b} \in Y\}$$

<제시문2>

3 이상인 자연수 n 에 대하여, 넓이가 1인 임의의 정 n 각형 하나의 경계와 그 내부에 있는 점들로 이루어진 집합을 A_n 이라고 정의한다. 중심이 원점이고 넓이가 1인 원의 경계와 그 내부에 있는 점들로 이루어진 집합을 B 라고 정의한다.

<제시문3>

$A_n + B$ 가 나타내는 영역의 넓이를 S_n 이라고 한다.

<제시문4>

함수 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ 는 열린구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가하는 함수이다.

[수학 1-i] <제시문 1>과 <제시문 2>의 정의로부터 $B+B$ 가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

[수학 1-ii] <제시문 1>과 <제시문 2>의 정의로부터 $A_3 + B$ 가 나타내는 영역의 넓이 S_3 의 값을 구하시오.

[수학 1-iii] 넓이 S_4 의 값을 구하고 문제 [수학 1-ii]의 답과 그 크기를 비교하시오.

[수학 1-iv] 수열 $S_3, S_4, S_5, \dots$ 이 감소수열인 이유를 <제시문 4>를 이용하여 설명하고, 이를 통해 넓이 S_n 의 값이 4보다 항상 큰 이유를 문제 [수학 1-i]의 결과를 이용하여 논하시오.

[4] 다음 <제시문1>~<제시문4>를 읽고 [수학2-i]~[수학2-iv]를 문항별로 풀이와 함께
 14 성균관대 수시

<제시문1>

두 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 의 값이 존재하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 말하고, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수라 하며, 기호로 $f'(a)$ 와 같이 나타낸다. 함수 $y=f'(x)$ 를 $f(x)$ 의 도함수라 부른다.

<제시문2>

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
로 정의한다.

<제시문3>

함수 $f(x)$ 가 정의역에서 $f''(x) > 0$ 이면, 곡선 $y=f(x)$ 는 아래로 볼록한 함수라고 정의한다. 단, $f''(x)$ 는 $f'(x)$ 의 도함수를 의미한다.

<제시문4>

함수 $y=g(x)$ 를 모든 실수 x 에 대해 아래와 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ 일 때}) \\ 0 & (x = 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

[수학 2-i] <제시문 4>에서 주어진 함수 $y=g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능함을 논하시오.

[수학 2-ii] <제시문 4>에서 주어진 함수 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.

[수학 2-iii] <제시문 4>에서 주어진 곡선 $y=g(x)$ 는 문제 [수학 2-ii]에서 구한 접선과 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 무한히 많은 교점을 가진다. 그 이유를 논하시오.

[수학 2-iv] 함수 $f(x)$ 가 아래로 볼록한 함수라고 가정하고, 그 위에 점 $P=(a, f(a))$ 를 잡자. 곡선 $y=f(x)$ 와 이 곡선의 P 에서의 접선은 점 P 에서 유일하게 만난다. 함수 $T(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$ 를 이용하여 그 이유를 논하시오.

[5] 다음 <제시문 1>과 <제시문 2>를 읽고 [수학 1-i]~[수학 1-iii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 15 성균관대 모의

<제시문 1>

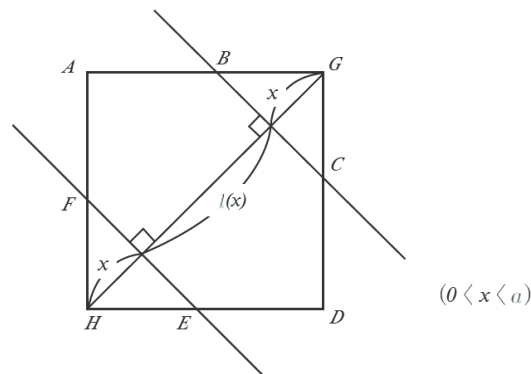
함수 $f(x)$ 에서 x 가 a 와 다른 값을 가지면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 α 에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

와 같이 나타낸다.

<제시문 2>

다음 그림과 같이 대각선의 길이가 $2a$ 인 정사각형을 세부분으로 나누려고 한다. (단, $a > 0$)



[수학 1-i] $0 < x < a$ 에 대하여 육각형 $ABCDEF$ 의 넓이 $S(x)$ 를 구하시오.

[수학 1-ii] 정사각형 $AGDH$ 의 넓이가 삼등분되기 위한 x 의 값을 구하시오.

[수학 1-iii] 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{S(x)}{l(x)}$ 의 값을 구하시오.

[6] <제시문1>~<제시문4>을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

<제시문 2>

두 직선 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ 이 서로 수직이기 위한 필요충분조건은

$$mm' = -1$$

<제시문 3>

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선

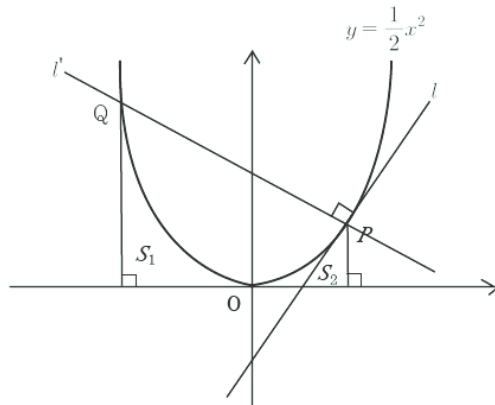
$$x = a, x = b \text{로 둘러싸인 도형의 넓이 } S \text{는 } S = \int_a^b f(x)dx$$

<제시문 4>

다음 그림과 같이 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ 에서의 접선을 l 이라

하고, 접선 l 과 수직인 직선 l' 이 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 만나는 점을 Q 라 하자.

(단, $a > 0$)



(1) 접선 l 의 방정식을 구하시오.

(2) 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 Q 의 좌표를 구하시오.

(3) S_1 과 S_2 의 넓이를 구하시오.

(4) 모든 $a > 0$ 에 대하여 S_1 과 S_2 의 넓이는 같지 않음을 논증하시오.

[7] 다음 <제시문1>~<제시문4>를 읽고 [수학 1-i]~[수학 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께
답하시오. 15 성균관대

<제시문1>

점 (x_1, y_1, z_1) 과 평면 $ax + by + cz + d = 0$ 사이의 거리는
 $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 이다.

<제시문2>

밀면의 반지름이 r 이고 높이가 h 인 원뿔의 부피는 $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ 이다.

<제시문3>

실수 $0 < t < 3$ 에 대하여, 좌표공간의 세 점 $P_1(t, 0, 0), P_2(0, t, 0), P_3(0, 0, t)$ 을
꼭짓점으로 가지는 삼각형의 내접원을 C_t 라고 한다.

<제시문4>

밀면이 내접원 C_t 이고 꼭짓점의 좌표가 $Q(1, 1, 1)$ 인 원뿔을 V_t 라고 한다.

[수학 1-i] 점 $Q(1, 1, 1)$ 에서 <제시문3>의 세 점 P_1, P_2, P_3 을 지나는 평면까지의 거리를
 t 에 관한 식으로 나타내고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ii] <제시문3>의 내접원 C_t 의 반지름을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-iii] 원뿔 V_t 의 부피의 최댓값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[8] 다음 <제시문1>~<제시문4>를 읽고 [수학 2-i] ~ [수학 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 15 성균관대

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간의 임의의 두 실수 $x < y$ 에 대하여 $f(x) < f(y)$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다고 한다.

<제시문2>

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

이다.

<제시문3>

닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여, 평균값을 $\int_0^1 f(x)dx$ 로 정의하고 증가폭을 $f(1) - f(0)$ 으로 정의한다.

<제시문4>

무리수 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 \dots$ 로 정의한다.

[수학 2-i] 함수 $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ 로 정의하자.

(가) $\int_0^1 f(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(나) 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $M < f(1) - f(0) + \int_0^1 f(x)dx$ 임을 보이고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-ii] 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 정의된, 연속이고 증가하는 임의의 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(x)$ 의 함수값이 평균값과 증가폭의 합보다 클 수 없음을 보이고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-iii] 함수 $h(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}(4x+1)\right)$ 은 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 증가하는 함수가 아니다. 이 구간에서 $h(x)$ 의 함수값이 평균값과 증가폭의 합보다 클 수 없음을 보이고 그 이유를 논하시오.

[9] 다음 <제시문1>~<제시문3>를 읽고 [수학 1-i]~[수학 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께
 15 성균관대

<제시문1>

양의 실수 a, b 에 대하여, x 축과의 교점이 각각 $(a, 0), (-a, 0)$ 이고 y 축과의
 교점이 각각 $(0, b), (0, -b)$ 인 타원 $E_{a,b}$ 는 다음의 식에 의해 정의된다.

$$E_{a,b} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<제시문2>

제 1사분면은 $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 으로 정의하고, 원점 O 의 좌표는 $(0, 0)$ 이
 다.

<제시문3>

타원 $E_{a,b}$ 위의 점 P 를 제 1사분면에서 임의로 잡고, P 에서의 접선이 x 축,
 y 축과 만나는 점을 각각 A, B , 그리고 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을
 각각 C, D 라 한다.

[수학 1-i] $a = 2, b = 1$ 일 때, 타원 $E_{2,1}$ 에 대하여 사각형 $OCPD$ 의 면적이 최대가 되는
 점 P 의 좌표와 그 최댓값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ii] $a = \sqrt{3}, b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 일 때, 타원 $E_{\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}}$ 에 대하여 사각형 $OCPD$ 를 x 축의 둘
 레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피가 최대가 되는 점 P 의 좌표와 그 최댓값을 구하고
 그 이유를 논하시오.

[수학 1-iii] a, b 가 임의의 양의 실수일 때, 타원 $E_{a,b}$ 에 대하여 $\overline{OA} \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \overline{OD}$ 의
 값이 점 P 의 위치에 관계없이 a, b 에 의해 결정됨을 보이고 그 이유를 논하시오.

[10] [문제 1] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [수학1- i]~[수학1- iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 16 성균관대 모의

<제시문 1>

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

<제시문 2>

음이 아닌 정수 n 에 대하여, 실수로 이루어진 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

(1) 초기항은 $a_0=1$ 이다.

(2) 음이 아닌 정수 n 에 대하여, 점 $P_n=(a_n, 0)$ 에서 포물선 $y=x^2$ 에 그린 접선 중 x 축이 아닌 접선을 L_n 이라고 하자. 접선 L_n 의 접점의 x 좌표를 a_{n+1} 이라고 한다.

<제시문 3>

음이 아닌 정수 n 에 대하여, <제시문 2>의 접선 L_n 에 수직이고, L_n 의 접점을 지나는 직선이 포물선 $y=x^2$ 과 접점이 아닌 또 다른 한 점에서 만난다. 이 점의 x 좌표를 b_{n+1} 이라고 정의한다.

[문제 1- i]

a_1 과 b_1 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 1- ii]

<제시문 2>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하고, 이를 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값을 논하시오.

[문제 1- iii]

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[11] [문제 2] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [수학2-ⅰ]~[수학2-Ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 16 성균관대 모의

<제시문 1>

함수 $y=f(x)$ 는 다음을 만족한다.

(1) 닫힌 구간 $[0,2]$ 에서 $f(x)=|x-1|$ 을 만족한다.

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+2)$ 를 만족한다.

<제시문 2>

양의 실수 a 에 대하여 직선 $y=ax$ 와 <제시문 1>의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(a)$ 로 정의한다.

<제시문 3>

양의 실수 x 에 대하여, <제시문2>의 함수 $y=g(x)$ 를 이용하여 함수

$$h(x)=\sin(x)\times g\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

를 정의한다.

[문제 2-ⅰ]

$\int_0^{2016} f(x)dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

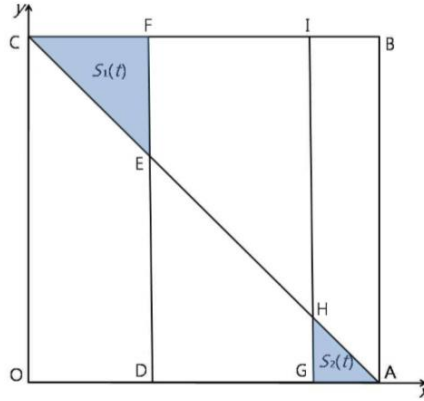
[문제 2-ⅱ]

$\sum_{n=1}^{100} g\left(\frac{1}{n}\right)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[문제 2-Ⅲ]

$\int_{\pi}^{51\pi} |h(x)| dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[12] 다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 16 성균관대



<제시문 1>

좌표평면의 네 점 $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,2)$, $C(0,2)$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $OABC$ 가 주어져 있다.

<제시문 2>

정사각형 $OABC$ 의 한 변 OA 위에 두 점 $D(t,0)$, $G(t+1,0)$ 을 잡는다.
(단, $0 \leq t \leq 1$)

<제시문 3>

점 D 에서 선분 OA 에 수직인 직선이 선분 CA 및 선분 CB 와 만나는 점을 각각 E, F 라 한다. 점 G 에서 선분 OA 에 수직인 직선이 선분 CA 및 선분 CB 와 만나는 점을 각각 H, I 라 한다.

<제시문 4>

삼각형 CEF 의 넓이를 $S_1(t)$, 삼각형 AHG 의 넓이를 $S_2(t)$ 라 한다.

(1) $S_1(t)$ 와 $S_2(t)$ 의 곱을 $g(t)$ 라 할 때, $g(t)$ 를 t 에 관한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

(2) $g(t)$ 의 최댓값과 그 때의 t 를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[13] 다음 <제시문1> ~ <제시문5>를 읽고 [문제 2]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

16 성균관대

<제시문 1>

좌표평면에서 제1사분면의 점들 전체의 집합을 H 라 한다.

<제시문 2>

실수 $a(a > 4)$ 가 주어져 있을 때, 좌표평면의 두 점 $E(2, 0)$, $E'(-2, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 $2\sqrt{a}$ 로 일정한 점들 전체의 집합을 A 라 한다.

<제시문 3>

<제시문 2>에서 주어진 실수 $a(a > 4)$ 에 대하여, 좌표평면의 두 점 $F(\sqrt{a}, 0)$, $F'(-\sqrt{a}, 0)$ 으로부터의 거리의 차가 4로 일정한 점들 전체의 집합을 B 라 한다.

<제시문 4>

원점 $O(0, 0)$ 으로부터의 거리가 $\sqrt{5}$ 로 일정한 점들 전체의 집합을 C 라 한다.

<제시문 5>

유한개의 원소를 가지는 임의의 집합 D 에 대하여 $n(D)$ 는 집합 D 의 원소의 개수를 나타낸다.

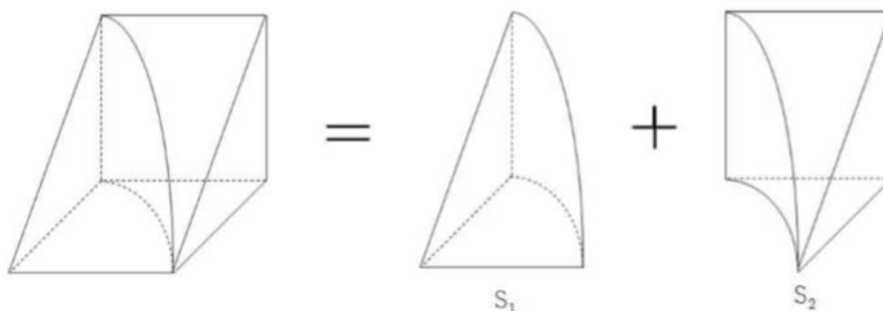
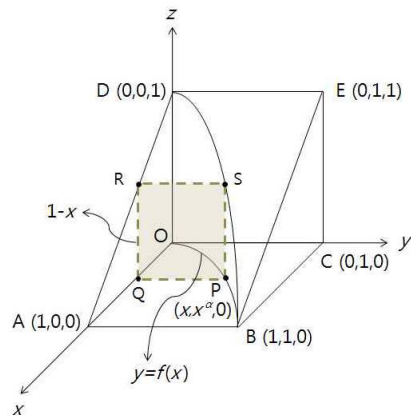
$n(A \cap B \cap C \cap H) = 1$ 이 되는 a 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[14] 다음 <제시문1> ~ <제시문2>를 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 16 성균관대

[제시문 1] 오른쪽 그림과 같이 직각이등변삼각형 OAD 를 밑면으로 하고, 높이가 1인 삼각기둥 $OADCBE$ 가 좌표공간 안에 옆으로 놓혀있다.

양의 실수 α 에 대하여, xy 평면 위에 곡선 $y=f(x)=x^\alpha$ 위의 점 $P(x, x^\alpha, 0)$ 에서 x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 선분 PQ 를 밑면으로 하고 높이가 $1-x$ 인 직사각형 $PQRS$ 를 x 축에 수직인 평면 위에 그린다.

점 P 가 곡선 $y=f(x)$ 위를 원점에서 점 $(1,1,0)$ 까지 움직일 때, 이 직사각형이 만드는 입체도형을 S_1 이라고 한다. 이 입체도형은 삼각기둥 $OADCBE$ 안에 놓이게 되는데, 삼각기둥 내부이면서 S_1 의 외부인 입체도형을 S_2 라고 한다.



[제시문 2]

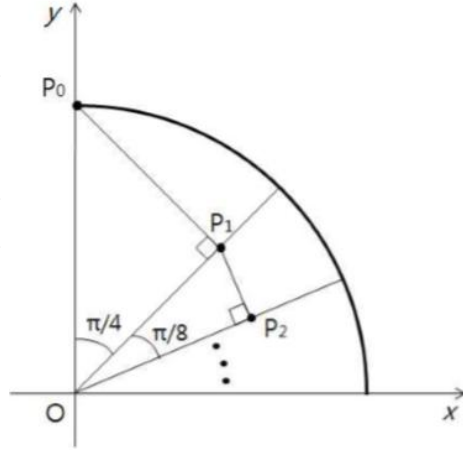
양의 실수 β 에 대하여 $\int x^\beta dx = \frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1} + C$ (C 는 상수)이다.

(1) [제시문 1]에서 $\alpha=1$ 일 때 S_1 의 부피의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2) S_1 과 S_2 의 부피의 값이 같아지는 α 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[15] 다음 <제시문1> ~ <제시문2>를 읽고 [문제 2-i] ~ [문제 2-iii] 을 문항별로 풀이
와 함께 답하시오. 16 성균관대

[제시문 1] 오른쪽 그림과 같이 좌표평면
위에 중심이 원점 O 이고 반지름이 1인 원 위
에 점 $P_0(0,1)$ 을 잡는다. 선분 OP_0 을 원점을
중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전시킨
선분 위에, 점 P_0 으로부터 내린 수선의 발을
점 P_1 이라고 한다. 다시 선분 OP_1 을 원점을
중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 회전시킨
선분 위에, 점 P_1 에서 내린 수선의 발을 점
 P_2 라고 한다. 위의 과정을 n 번 반복하였을 때
생기는 점을 P_n 이라고 한다. 즉, 선분 OP_{n-1}
을 원점을 중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 만큼 회전시킨 선분 위에, 점
 P_{n-1} 에서 내린 수선의 발을 점 P_n 이라고 한다. 이때, 점 P_n 의 좌표는
 (x_n, y_n) 이라고 한다.



[제시문 2] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 의 값은 1이다. (단, x 의 단위는 라디안)

(1) 점 P_1 의 좌표 (x_1, y_1) 을 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[16] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [수학 1-i]~[수학 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 17 성균관대 모의

<제시문 1>

초기항이 $a_1 = 1$ 이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_i\}$ 의 처음 n 개 항의 합은

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 이다.}$$

<제시문 2>

자연수 n 에 대하여, 좌표평면 위에 격자점의 집합 P_n 과 S_n 을 다음과 같이 정의한다.

$$P_n = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq n \text{이고, } x \text{와 } y \text{는 정수}\}$$

$$S_n = \{(x, y) \in P_n | x \leq 3y \leq 9x\}$$

<제시문 3>

자연수 k 에 대하여, k 차 다항식 $p(x)$ 와 $q(x)$ 의 최고차항의 계수를 각각 a 와 b 라 할 때, 극한 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ 의 값은 $\frac{a}{b}$ 이다.

수학 1-i. <제시문 2>에서 $n = 3$ 일 때, 집합 P_3 과 S_3 의 원소의 개수를 각각 구하고, 그 이유를 논하시오.

수학 1-ii. 자연수 n 이 3의 배수일 때, S_n 의 원소의 개수를 n 에 대한 함수로 표현하고, 그 이유를 논하시오.

수학 1-iii. 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(S_n \text{의 원소의 개수})}{(P_n \text{의 원소의 개수})}$ 의 값을 구하고, 그 이유를 구하시오.

[17] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [수학 2- i]~[수학 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 17 성균관대 모의

<제시문 1>

좌표공간에서 중심이 원점이고 반지름이 1인 구 A 의 부피는 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

<제시문 2>

닫힌 구간 $[a, b]$ 의 임의의 점 x 에서 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 이고, 함수 $S(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$ 로 주어진다.

<제시문 3>

3이상인 자연수 n 에 대하여, <제시문 1>의 구 A 의 내부에 입체도형 V_n 이 놓여있다. 열린 구간 $(-1, 1)$ 의 임의의 점 x 에서 V_n 을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은, 구 A 를 자른 단면에 내접하는 정 n 각형이다. $x = -1$ 또는 $x = 1$ 일 때의 V_n 의 단면은 각각 점 $(-1, 0, 0)$ 과 $(1, 0, 0)$ 이라고 한다.

수학 2- i . 반지름이 r 인 원에 내접하는 정 n 각형의 넓이를 n 과 r 에 관한 식으로 표현하고, 그 이유를 논하시오.

수학 2- ii . <제시문 3>의 입체도형 V_n 의 부피를 n 에 관한 식으로 표현하고, 그 이유를 논하시오.

수학 2- iii . n 이 무한대로 갈 때, 입체도형 V_n 의 부피의 극한값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[18] 다음 <제시문1>~<제시문3>을 읽고 (1-1)~(1-2)를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

17 성균관대 자연 I

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

<제시문2>

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모두 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

<제시문3>

실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 $f: R \rightarrow R$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x^3 & (x < 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

로 정의할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1, 1)$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 B 라고 하자. 점 B 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선 중 점 A 를 지나지 않는 접선의 접점을 C 라 하자.

(1-1) <제시문3>에서 점 C 의 좌표를 구하고, 그 이유를 논하시오.

(1-2) <제시문3>에서 삼각형 ABC 는 곡선 $y=f(x)$ 에 의해 두 부분으로 나누어진다. 이중 점 $P(0, -1)$ 를 포함하는 부분의 넓이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[19] 다음 <제시문1>~<제시문2>를 읽고 (2-1)~(2-2)를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

17 성균관대 자연 I

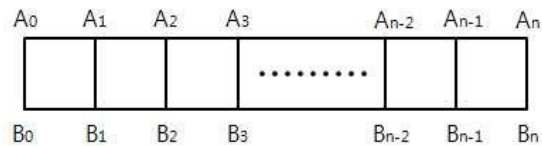
<제시문1>

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

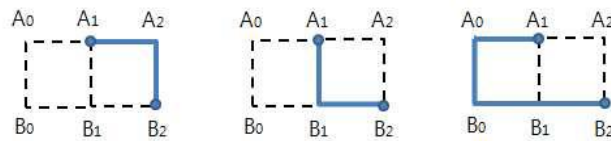
$$S_n = \begin{cases} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} & (r \neq 1 \text{ 일 때}) \\ na & (r = 1 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

<제시문2>

자연수 n 에 대하여 아래 그림과 같은 도로망이 있다.



단, 이 도로망 위를 이동할 때 한 번 지나간 지점은 다시 지날 수 없다. 예를 들어, $n=2$ 일 때, A_1 지점으로부터 B_2 지점까지 가는 방법은 다음과 같이 3가지이다.



여기서, 이동 거리는 최단 거리일 필요는 없으며, 출발 지점은 한 번 지나간 지점으로 간주한다.

(2-1) <제시문2>의 도로망에서 $n=100$ 일 때, A_0 지점으로부터 B_{100} 지점까지 가는 방법은 몇 가지인지 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2-2) <제시문2>의 도로망에서 $n=100$ 일 때, 도로망 위쪽의 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{100}$ 각각의 지점에서 출발하여 B_{100} 지점까지 가는 방법의 수의 총합을 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $n=2$ 일 때 A_0, A_1, A_2 지점 중 하나에서 출발하여 B_2 지점까지 가는 방법의 수의 총합은 10가지이다.

[20] 다음 <제시문1>~<제시문2>을 읽고 (1-1)~(1-2)를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

17 성균관대 자연 II

<제시문1>

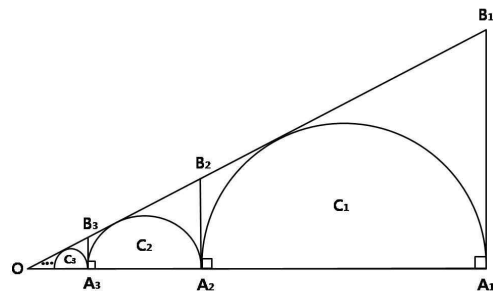
(1) 아래 그림과 같이 $\overline{OA_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$ 인 직각삼각형 OA_1B_1 이 주어져 있다.

(2) 중심이 선분 OA_1 위에 위치하고 점 A_1 을 지나며 선분 OB_1 에 접하는 반원을 C_1 이라 하고 그 반지름을 r_1 이라 한다.

(3) 반원 C_1 과 선분 OA_1 이 만나는 점 중 A_1 이 아닌 점을 A_2 라 하고, A_2 를 지나고 선분 OA_1 에 수직인 직선이 선분 OB_1 과 만나는 점을 B_2 라 한다. 직각삼각형 OA_2B_2 에서 중심이 선분 OA_2 위에 위치하고 점 A_2 를 지나며 선분 OB_2 에 접하는 반원을 C_2 라 하고 그 반지름을 r_2 라 한다.

(4) 반원 C_2 와 선분 OA_2 가 만나는 점 중 A_2 가 아닌 점을 A_3 이라 하고, A_3 을 지나고 선분 OA_2 에 수직인 직선이 선분 OB_2 와 만나는 점을 B_3 이라 한다. 직각삼각형 OA_3B_3 에서 중심이 선분 OA_3 위에 위치하고 점 A_3 을 지나며 선분 OB_3 에 접하는 반원을 C_3 이라 하고 그 반지름을 r_3 이라 한다.

(5) 이와 같은 방법으로 반원 $C_1, C_2, C_3, \dots$ 을 계속하여 그려 나갈 때 n 번째에 그려지는 반원의 넓이를 S_n 이라고 한다.



<제시문2>

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ ($a \neq 0$)은 $-1 < r < 1$ 일 때 수렴

하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.

(1-1) S_1 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

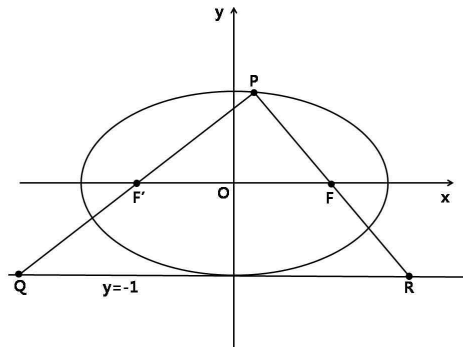
(1-2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[21] 다음 <제시문>을 읽고 (2-1)~(2-3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

17 성균관대 자연 II

<제시문>

아래 그림과 같이 타원 $E: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 위의 한 점 $P(a, b)$ (단, $-1 \leq a \leq 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq b \leq 1$)를 잡고, 점 P 와 타원 E 의 두 초점 F', F 를 연결한 직선이 직선 $y = -1$ 과 만나는 점을 각각 Q, R 이라 한다.



(2-1) 선분 QR 의 길이를 a 에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

(2-2) 삼각형 PQR 의 넓이를 b 에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

(2-3) 삼각형 PQR 의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[22] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [수학 1-i]~[수학 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 18 성균관대 모의

<제시문 1> 자연수의 거듭제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<제시문 2> 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ 이다.

<제시문 3> 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = x^3 + x$ 와 곡선 $y = n(x^4 + x^2)$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n 이라고 한다.

[수학 1-i] <제시문 3>에서 a_1 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1-ii] <제시문 3>의 a_n 에 대하여, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-iii] <제시문 3>의 a_n 에 대하여, $\sum_{n=1}^{10} n^4 a_n$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[23] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [수학 2-i]~[수학 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 18 성균관대 모의

<제시문 1> 사인함수와 코사인함수의 도함수는 다음과 같다.

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$$

<제시문 2> 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

<제시문 3> 함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)| dx$ 이다.

[수학 2-i] 정적분 $\int_{-1}^2 |\cos(\pi x)| dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

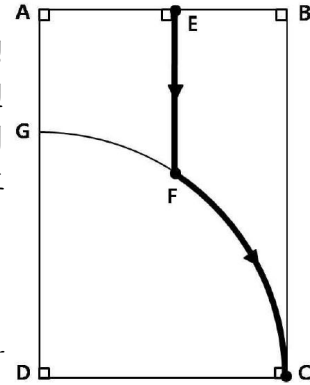
[수학 2-ii] 함수 $y = f(x)$ 가 $f(0) = 0$ 이고 모든 x 에 대하여 $f'(x) = |\cos(\pi x)|$ 을 만족할 때, $\int_{-1}^2 f(x) dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-iii] 함수 $y = g(x)$ 가 $g(0) = g'(0) = 0$ 이고 모든 x 에 대하여 $g''(x) = |\cos(\pi x)|$ 을 만족할 때, $\int_{-\frac{1}{2}}^1 g(x) dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[24] 다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 (1-1) ~ (1-3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 18 성균관대 오전

<제시문1>

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DC}=2$ 인 직사각형 $ABCD$ 내부에, 점 D 를 중심으로 하고 반지름이 2인 사분원 DGC 가 놓여있다. 선분 AB 위의 한 점 E 에서 선분 AD 와 평행하게 그은 선분이 사분원 DGC 와 만나게 하는 점을 F 라 하자.



<제시문2>

성균이는 점 E 에서 출발하여 오른쪽 그림과 같이 화살표 방향으로 선분 EF 와 호 FC 를 거쳐 점 C 로 이동하고자 한다. 성균이는 선분 EF 위를 매초 1의 속력으로 움직이고 호 FC 위를 매초 2의 속력으로 이동한다. 성균이가 점 E 를 출발하여 제시된 경로를 따라 점 C 에 도달하는데 걸리는 시간을 T (초)라 한다.

<제시문3>

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 최댓값과 최솟값을 가진다.

(1-1) 선분 AE 의 길이가 $\sqrt{3}$ 일 때 <제시문 2>의 T 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(1-2) <제시문 2>의 T 의 값이 최소가 되는 선분 AE 의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.

(1-3) <제시문 2>의 T 의 값이 최소가 될 때 도형 $AEFG$ 와 도형 $EBCF$ 의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

[25] 다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 (2-1) ~ (2-4)를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 18 성균관대 오전

<제시문1>

사건 A, B 에 대하여 사건 B 가 일어났을 때, 사건 A 가 일어날 확률을 사건 B 가 일어났을 때의 사건 A 의 조건부확률이라 하고, 기호로 $P(A|B)$ 와 같이 나타낸다.

사건 B 가 일어났을 때의 사건 A 의 조건부확률은 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (단, $P(B) \neq 0$)을 만족한다.

<제시문2>

어떤 사건 A 에 대하여 A 가 일어나지 않는 사건을 A 의 여사건이라 하고, 기호로 A^c 와 같이 나타낸다. 두 사건 A 와 B 에 대하여 $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ 가 항상 성립한다.

<제시문3>

$g(n)$ 과 $h(n)$ 이 n 에 대한 다항식일 때, $\frac{g(n)}{h(n)}$ 을 n 에 대한 유리식이라 한다. (단, $h(n) \neq 0$)

<제시문4>

자연수 n 에 대하여 그림과 같이 <상자1>에는 1부터 $6n$ 까지의 자연수가 적힌 $6n$ 장의 카드가 있고 <상자2>에는 2부터 $6n$ 까지의 짝수가 적힌 $3n$ 장의 카드가 있다.



(2-1) <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 합이 짝수일 확률을 n 에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

(2-2) <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 확률을 n 에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

(2-3) <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 때, 이 두 수의 합이 짝수일 확률을 n 에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

(2-4) <제시문4>의 <상자1>과 <상자2> 중 임의로 한 상자를 골라 그 안에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수를 곱했더니 6의 배수가 되었다. 이 때 카드를 뽑은 상자가 <상자1>일 확률을 $f(n)$ 이라 했을 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[26] 다음 <제시문1>, <제시문2>을 읽고 (1-1) ~ (1-3)를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 18 성균관대 오후

<제시문1>

원 $C: x^2 + y^2 = 4$ 와 두 점 $P(0, 2)$, $Q(0, -1)$ 이 주어져 있다. 점 Q 를 지나는 직선 L 이 원 C 와 만나는 두 점을 각각 R , S 라 한다.

<제시문2>

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 최댓값과 최솟값을 가진다.

(1-1) 직선 L 의 기울기를 실수 m ($-2 \leq m \leq 2$)이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS 의 세 변의 길이의 제곱의 합 $\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SP}^2$ 이 최대가 되는 m 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(1-2) 직선 L 의 기울기를 실수 m ($-2 \leq m \leq 2$)이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS 의 넓이가 최대가 되는 m 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[27] 다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 (2-1) ~ (2-3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 18 성균관대 오후

<제시문1>

함수 $g(x)$ 가 실수 a 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $g(x) \leq g(a)$ 를 만족하면 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다고 한다.

<제시문2>

함수 $g(x)$ 가 실수 a 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $g(x) \geq g(a)$ 를 만족하면 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값을 가진다고 한다.

<제시문3>

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2018}$ 은 $x_0 = 0, x_{2018} = 100$ 과 $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2018}$ 을 만족하는 실수이다. 닫힌 구간 $[0, 100]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 는 다음을 만족한다.

(1) $f(0) = \sqrt{2}, f(100) = \sqrt{3}$

(2) $f(x)$ 는 $x = x_l$ ($l = 1, 3, 5, \dots, 2017$)에서 극댓값을 가지고

$x = x_m$ ($m = 2, 4, 6, \dots, 2016$)에서 극솟값을 가진다.

(3) 2018 이하의 임의의 자연수 k 에 대하여 열린 구간 (x_{k-1}, x_k) 에서

$f'(x) = 2$ 또는 $f'(x) = -3$ 이다.

(2-1) <제시문3>에서 추가적으로 $x_1 = 1, x_{2017} = 99$ 를 만족한다고 할 때 $f(x_1)$ 과 $f(x_{2017})$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-2) <제시문3>에서 추가적으로 $x_{1008} = 49, x_{1010} = 51, f(x_{1008}) = \sqrt{5}, f(x_{1010}) = \sqrt{7}$ 을 만족한다고 할 때 x_{1009} 와 $f(x_{1009})$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-3) <제시문3>에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\sum_{n=0}^{2018} (-1)^n f(x_n)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[28] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

19 성균관대 모의

<가> 좌표 평면 위의 점 $A(0, 1)$ 와 점 $B(0, a)$ ($-1 < a < 1$)를 y 축 위에 잡고 점 B 에서 x 축에 평행한 직선이 포물선 $y = x^2 - 1$ 과 만나는 두 점을 각각 C, D 라 한다.

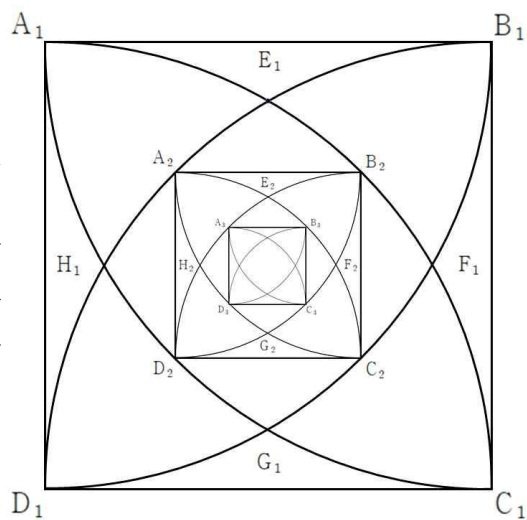
<나> 선분 $\overline{AD}$, 선분 $\overline{AC}$, 그리고 포물선 $y = x^2 - 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_0 라 하고, 삼각형 ACD 의 넓이를 S_1 이라 한다. S_0 에서 S_1 을 뺀 값을 S_2 라 정의하고, $S = S_1 \times S_2$ 라 정의한다.

<다> 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ 이다.

(1-1) S 를 a 의 함수로 나타내고 그 이유를 논하시오

(1-2) S 의 최댓값과 그때의 a 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

<가> 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 각 꼭짓점에서 사분원을 그리고 이 사분원들이 서로 만나는 점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1 이라 한다. 도형 $E_1F_1G_1H_1$ 에 내접하고, 각 변이 각각 선분 $\overline{A_1B_1}, \overline{B_1C_1}, \overline{C_1D_1}, \overline{D_1A_1}$ 에 평행한 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 오른쪽 그림과 같이 정의한다.



<나> 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 각 꼭짓점에서 사분원을 그리고 이 사분원들이 서로 만나는 점을 위의 그림과 같이 각각 E_2, F_2, G_2, H_2 라 한다. 도형 $E_2F_2G_2H_2$ 에 내접하고, 각 변이 각각 선분 $\overline{A_2B_2}, \overline{B_2C_2}, \overline{C_2D_2}, \overline{D_2A_2}$ 에 평행한 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 를 위의 그림과 같이 정의한다.

<다> 이와 같은 방법으로 정사각형을 한 없이 그려 나갈 때 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 넓이를 S_n 이라 하고, $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 이라 한다.

<라> 첫째항이 a ($a \neq 0$), 공비가 r 인 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 은 $-1 < r < 1$ 일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.

(2-1) 도형 $E_1F_1G_1H_1$ 의 둘레의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-2) 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-3) S 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[30] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [1-1]~[1-3]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.
19 성균관대 자연1

<제시문 1>

극한 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 의 값은 1이다. (단, x 의 단위는 라디안)

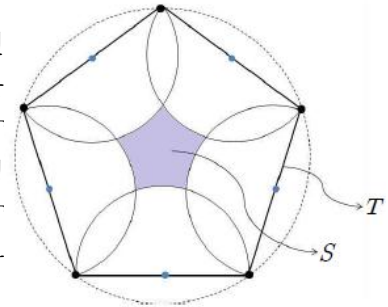
<제시문 2>

다음과 같이 삼각함수의 덧셈정리가 성립한다.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

<제시문 3>

5 이상인 자연수 n 에 대하여 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정 n 각형을 T 라고 하자. T 의 각 변을 지름으로 가지는 n 개의 원 내부에 포함되지 않는 T 내부의 영역을 S 라고 하자. 예를 들어, $n=5$ 일 때 영역 S 는 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 정 n 각형 T 내부의 넓이를 $f(n)$, 영역 S 의 넓이를 $g(n)$ 이라고 하자.



[1-1] <제시문 3>의 $f(n)$ 을 n 에 대한 식으로 나타내고 그 이유를 논하시오.

[1-2] <제시문 3>에서 $n=6$ 일 때 $g(6)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[1-3] 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(n) - g(2n))$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[31] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [2-1]~[2-4]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 19 성균관대 자연1

<제시문 1>

서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 이다.

<제시문 2>

서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 이다.

<제시문 3>

자연수 n 에 대하여 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이 성립한다.

답은 ${}_nC_r, {}_nH_r, n!, 2^n$ 등을 사용하지 않는 자연수 표기법으로 적으시오.

예: 답이 ${}_5C_2 + 3$ 이면 13으로 적는다.

[2-1] 두 집합 $X = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $Y = \{y | y \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건 : 정수 $1 \leq i \leq 9$ 에 대해 $f(i) \leq f(i+1) \leq f(i) + 1$ 이 성립하고 $f(1) = 1$ 이다.

[2-2] 두 집합 $X = \{x | x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$, $Y = \{y | y \text{는 } 21 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건 : $\{f(i+1) - f(i) | i \text{는 } 1 \leq i \leq 5 \text{인 정수}\} \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$ 이 성립하고 $f(1) = 1, f(6) = 21$ 이다.

[2-3] 두 집합 $X = \{x | x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$, $Y = \{y | y \text{는 } 27 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건 : 정수 $1 \leq i \leq 8$ 에 대해 $0 \leq f(i+1) - f(i) \leq 4$ 이 성립하고 정수 $2 \leq j \leq 8$ 에 대해 $f(j) \geq \frac{f(j-1) + f(j+1)}{2}$ 이 성립하며 $f(1) = 1$ 이다.

[2-4] 두 집합 $X = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$, $Y = \{y | y \text{는 } 13 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대해 다음 조건을 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

조건: 정수 $1 \leq i \leq 4$ 에 대해 $f(i) \leq f(i+1) \leq f(i) + 7$ 이 성립한다.

[32] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [1-1], [1-2]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 19 성균관대 자연2

<제시문 1>

함수 $h(x)$ 가 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하고 $h'(x) > 0$ 이면 이 구간에서 함수 $h(x)$ 는 증가한다.

<제시문 2>

함수 $h(x)$ 가 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하고 $h'(x) < 0$ 이면 이 구간에서 함수 $h(x)$ 는 감소한다.

<제시문 3>

함수 $f(x)$ 는 $f(x) = x^4 - 14x^2 - 24x + 27$ 로 정의된다.

[1-1] <제시문 3>에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = k$ (k 는 실수)의 그래프가 서로 다른 4개의 점에서 만난다고 할 때, 실수 k 의 범위를 구하고 그 이유를 논하시오.

[1-2] <제시문 3>에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = mx^2 + r$ 의 그래프가 서로 다른 4개의 점에서 만나는 실수 r 이 존재한다고 할 때, 실수 m 의 범위를 구하고 그 이유를 논하시오.

[33] 다음 <제시문 1>~<제시문 3>을 읽고 [2-1]~[2-3]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 19 성균관대 자연2

<제시문 1>

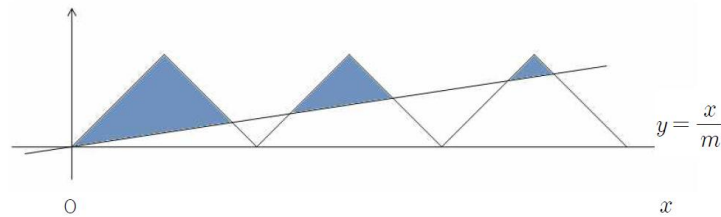
자연수 n 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<제시문 2>

함수 $y=f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 2$ 일 때 $f(x)=1-|1-x|$ 를 만족하고, 음이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족한다. 이 때, 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 부등식 $\frac{x}{m} \leq y \leq f(x)$ 를 만족하는 제1사분면에 있는 점들의 집합을 P 라 하고, 영역 P 의 넓이를 $g(m)$ 이라고 하자. (단, $m > 1$ 인 실수)



<제시문 3>

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ 일 때, 수열 $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 이고 $\alpha = \beta$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ 이다.

[2-1] <제시문 2>에서 $m=4$ 일 때, $g(4)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오

[2-2] 양의 실수 m 이 자연수 n 에 대하여 $2n-1 \leq m < 2n+1$ 을 만족할 때, <제시문 2>에서 $3(n-g(m))$ 의 값은 어떤 다항식 $f(n)$ 에 대하여 $3(n-g(m)) = \frac{f(n)}{m+1} - \frac{f(n-1)}{m-1}$ 로 쓰여진다. 이 때, 다항식 $f(n)$ 을 n 에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

[2-3] <제시문 2>에서 극한 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(m)}{m}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[34] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

20 성균관대 모의

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

<제시문2>

두 초점 $F(0, c), F'(0, -c)$ 로부터 거리의 합이 $2b$ 인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0, a^2 = b^2 - c^2)$$

<제시문3>

i) 좌표평면 위에서 $|x| + |y| = 1$ 을 만족하는 점 (x, y) 의 집합을 P 라고 하자.

ii) 부등식 $0 < u^2 + v^2 \leq 1$ 을 만족하는 u, v 에 대하여 매개변수 $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 로 표현되는 점 $(x, y) = (u \cos \theta, v \sin \theta)$ 의 집합을 C 라고 하자.

iii) 집합 P 와 집합 C 가 공집합이 아닌 교집합을 가지게 되는 점 (u, v) 로 이루어진 집합을 S 라고 하자.

(1-1) <제시문3>의 집합 S 가 좌표평면 위에서 이루는 곡선의 길이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

(1-2) <제시문3>의 곡선 C 위의 어떠한 점 Q 에 대해서도 $\overline{QF} + \overline{QF'}$ 의 값이 일정한 좌표평면 위의 두 점 F, F' 이 존재한다. 집합 S 에 속한 점 (u, v) 에 대하여 $\overline{FF'}$ 의 값이 $\sqrt{2}$ 이하가 되는 점 (u, v) 의 집합이 이루는 곡선의 길이의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어 $u = v$ 일 때 점 F 와 점 F' 은 원점으로 일치하고 $\overline{FF'} = 0$ 이다.

<제시문1>

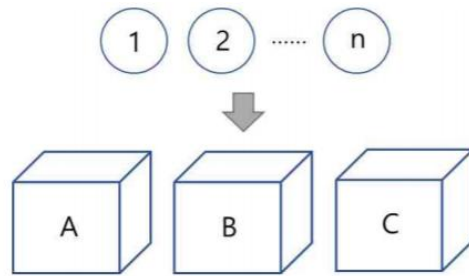
두 사건 X, Y 가 일어나는 경우의 수가 각각 x, y 이고 두 사건 X, Y 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 X 또는 사건 Y 가 일어나는 경우의 수는 $x+y$ 이며, 이를 합의 법칙이라고 한다. 합의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문2>

사건 X 가 일어나는 경우의 수가 x 이고, 그 각각의 경우에 대하여 사건 Y 가 일어나는 경우의 수가 y 일 때, 두 사건 X, Y 가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $x \times y$ 이며, 이를 곱의 법칙이라고 한다. 곱의 법칙은 세 개 이상의 사건에 대하여도 성립한다.

<제시문3>

양의 정수 n 에 대하여, 오른쪽 그림과 같이 1부터 n 까지의 숫자가 각각 적힌 n 개의 공을 A, B, C 라고 각각 적힌 세 개의 상자에 담으려고 할 때, 가능한 모든 경우의 수를 $S(n)$ 이라고 한다.



(2-1) <제시문3>에서 $n=7$ 일 때, $S(7)$ 의 값을 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, $2^7 - 2^4$ 는 112로 표현한다.

(2-2) <제시문3>에서 $n=7$ 일 때, A, B, C 세 개의 상자 모두 적어도 한 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2-3) <제시문3>에서 $n=7$ 일 때, A, B, C 세 개의 상자 모두 적어도 두 개의 공을 가지고 있을 경우의 수를 십진법 표기로 구하고, 그 이유를 논하시오.

[36] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

20 성균관대 자연1

<제시문 1>

표본공간 S 에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A 가 일어날 수학적 확률은 다음과 같다.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

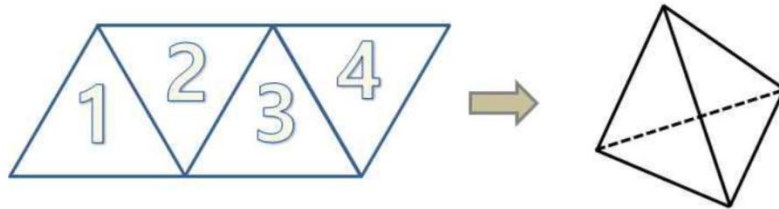
<제시문 2>

사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률은 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 이다.

(단, $P(A) > 0$)

<제시문 3>

아래 그림과 같이 각 면에 양의 정수 1,2,3,4가 쓰여진 정사면체 모양의 주사위를 던져서 밑에 깔린 숫자를 선택하자. 이때 각 숫자가 선택될 확률은 동일하다. 주사위를 10번 던져 숫자 n 이 선택된 횟수를 a_n 이라고 할 때, 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ 로 정의한다. 예를 들어, 선택된 숫자가 순서대로 4→3→4→4→3→4→3→3→4→4일 때, 함수 $f(x) = 4x + 6$ 이다.



(1-1) <제시문 3>에서 $f(0)$ 의 값이 2일 확률을 구하고 그 이유를 논하시오.

(1-2) <제시문 3>에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선이 아니라고 할 때, 그 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 100 이상일 확률을 구하고 그 이유를 논하시오.

(1-3) <제시문 3>에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = 8$ 과 적어도 한 점에서 만날 확률을 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문 1>

함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다. 그러나 그 역은 성립하지 않는다.

<제시문 2>

함수 $y=f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 함수 $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

<제시문 3>

양의 정수 n 에 대하여, 닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 는 다음을 만족한다.

$$g(x) = 2^n a_n \cos(x - n\pi) + (b_n + (-1)^n) \sin(x - n\pi) \quad (\text{단, } a_n \text{과 } b_n \text{은 실수})$$

함수 $y=g(x)$ 는 구간 (π, ∞) 에서 미분가능하며, $\int_{\pi}^{2\pi} g(x)dx = -6$ 과

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)dx = -2 \text{를 만족한다.}$$

(2-1) <제시문 3>의 함수 $y=g(x)$ 에 대하여, 상수 b_1 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-2) <제시문 3>의 함수 $y=g(x)$ 에 대하여, 정적분 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-3) <제시문 3>의 함수 $y=g(x)$ 에 대하여, 정적분 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문 1>

쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = -1$ 의 윗부분을 C_1 으로 하고, 아랫부분을 C_2 라고 하자. 쌍곡선 밖의 한 점 P 에서 곡선 C_1 에 그은 접선의 접점을 Q , 점 P 에서 곡선 C_2 에 그은 접선의 접점을 R 로 표기하자.

<제시문 2>

n 은 양의 정수라고 하자. <제시문 1>에서 정의된 두 곡선 C_1, C_2 에 대하여, 점 $P_n(3n, n)$ 에서 곡선 C_1 에 그은 접선 위의 접점을 $Q_n\left(a, \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\right)$, 곡선 C_2 에 그은 접선 위의 접점을 $R_n\left(b, -\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}\right)$ 이라 하자. (단, a, b 는 실수)

(1-1) <제시문 1>에서 점 Q 에서의 접선의 기울기를 m_1 이라 하고, 점 R 에서의 접선의 기울기를 m_2 라고 할 때, m_1 과 m_2 의 범위를 찾은 후, 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이 되는 점들의 좌표를 구하고 그 이유를 논하시오.

(1-2) <제시문 2>에 있는 실수 a, b 와 양의 정수 n 에 대하여, a 와 b 를 n 에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

(1-3) <제시문 2>의 실수 a 가 모든 양의 정수 n 에 대해서 부등식 $k \leq a < l$ 을 만족할 때, k 의 최댓값과 l 의 최솟값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, k, l 은 실수)

(1-4) <제시문 2>에 있는 세 점 P_n, Q_n, R_n 과 원점 $O(0,0)$ 에 대하여, 삼각형 $P_n O Q_n$ 의 넓이와 삼각형 $R_n O P_n$ 의 넓이의 합을 A_n 이라고 놓을 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n}$ 을 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문 1>

함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ -\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

<제시문 2>

양의 정수 n 과 <제시문 1>에 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여, 두 곡선 $y = f(nx)$, $y = f(nx-1)$ 과 두 직선 $x=0, x=1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 a_n 이라 하자.

<제시문 3>

양의 정수 n 과 <제시문 1>에 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여, 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x-2n) - f(x-n) + f(n)$ 으로 정의하자. 이때 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 b_n 이라 하자.

(2-1) <제시문 2>에 주어진 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 n 에 대한 식으로 표현한 후, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt{n^r} = 1$ 이 되도록 하는 양의 정수 r 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-2) <제시문 3>에 정의된 함수 $g(x)$ 가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 표로 나타낸 후, 함수 $g(x)$ 의 최솟값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2-3) <제시문 3>에 주어진 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 n 에 대한 식으로 표현한 후, 수열 $\left\{\frac{b_n}{n^s}\right\}$ 이 수렴하기 위한 실수 s 의 값의 범위와 그때의 극한값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[40] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

21 성균관대 자연

<제시문 1> 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 를 잇는 선분 AB를 $m : n$ ($m > 0$, $n > 0$)으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

<제시문 2> 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 로부터 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > c > 0, b^2 = a^2 - c^2)$$

<제시문 3> 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

<제시문 4>

1. 두 점 $L_0(-3, 0)$, $R_0(3, 0)$ 으로 이루어진 선분 L_0R_0 을 $1 : 2$ 로 내분하는 점을 L_1 이라 하고, 선분 L_0R_0 을 $2 : 1$ 로 내분하는 점을 R_1 이라 한다. 두 점 L_0 , R_0 을 지나고, 두 점 L_1 , R_1 을 초점으로 가지는 타원을 타원 E_0 라 한다.

2. 선분 L_1R_1 을 $1 : 2$ 로 내분하는 점을 L_2 라 하고, 선분 L_1R_1 을 $2 : 1$ 로 내분하는 점을 R_2 라 한다. 두 점 L_1 , R_1 을 지나고, 두 점 L_2 , R_2 을 초점으로 가지는 타원을 타원 E_1 라 한다.

3. 선분 L_2R_2 을 $1 : 2$ 로 내분하는 점을 L_3 이라 하고, 선분 L_2R_2 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점을 R_3 이라 한다. 두 점 L_2 , R_2 을 지나고, 두 점 L_3 , R_3 을 초점으로 가지는 타원을 타원 E_2 라 한다.

4. 이와 같은 방법으로 한없이 타원 E_0 , E_1 , E_2 , E_3 , ...을 만든다.

<제시문 5> 타원 E_n 의 넓이를 S_n 이라 한다. ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

(1) 타원 E_0 , E_1 , E_2 , E_3 의 방정식을 찾고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문3>을 활용하여 S_0 , S_1 , S_2 , S_3 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문 1> 중심이 점 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

<제시문 2> 원점 $(0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름이 2인 원의 방정식을 원 C 라 한다.

<제시문 3> 좌표평면에서 x 축 위의 점 $P(1, 0)$ 을 지나는 직선을 직선 l 이라 하자. 직선 l 이 원 C 와 서로 다른 두 점에서 만난다고 할 때, 이 두 점을 각각 P_1, P_2 라 한다.

(1) 두 선분의 길이의 곱 $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2}$ 가 직선 l 의 기울기에 관계없이 일정함을 보이고 그 이유를 논하시오.

(2) $\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2$ 의 최솟값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) $\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2$ 의 최댓값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[42] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

21 성균관대 자연1

<제시문1>

초점이 $(0, p)$, 준선이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

<제시문2>

포물선 $x^2 = 4py$ 위의 원점이 아닌 점 C 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 D 라 한다. 또한, 점 C 에서 y 축에 내린 수선의 발을 E 라 한다.

<제시문3>

자연수 n 에 대하여, 포물선 $y = nx^2$ 위의 원점이 아닌 점 C_n 을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 D_n 이라 한다. 또한, 점 C_n 에서 y 축에 내린 수선의 발을 E_n 이라 한다. 이때 선분 D_nE_n 의 길이를 a_n 이라 한다.

<제시문4>

포물선 $x^2 = 4py$ 위의 원점이 아닌 점 $\left(a, \frac{a^2}{4p}\right)$ (단, $a > 0$)을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선을 l_a 라 한다. 직선 l_a 가 포물선 $x^2 = 4py$ 와 만나는 두 점의 y 좌표의 값을 각각 $f(a), g(a)$ 라 하고, l_a 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표의 값을 $h(a)$ 라 한다.

[수학 1-1] <제시문2>의 점 D 와 점 E 사이의 거리는, 점 C 의 위치에 관계없이 항상 포물선 $x^2 = 4py$ 의 초점과 준선 사이의 거리와 같음을 보이고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-2] <제시문3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대해서, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-3] <제시문4>에서 정의된 $f(a), g(a), h(a)$ 에 대하여, 극한 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)g(a)}{ah(a)}$ 의 값은 p 에 관계 없이 일정함을 보이고 그 이유를 논하시오.

<제시문1>

유리함수 $y = \frac{2x+1}{2x+2}$ 의 그래프 위의 임의의 한 점 $P(\alpha, \beta)$ 로부터 원점까지 이르는 거리를 r 이라 하자.

<제시문2>

실수 a, b, c 에 대하여 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ 가 성립한다.

[수학 2-1] <제시문1>의 α, β 에 대해 $\alpha > -1$ 일 때, $\alpha - \beta$ 의 최솟값과 $\alpha < -1$ 일 때, $\alpha - \beta$ 의 최댓값을 각각 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2-2] <제시문1>의 α, β, r 에 대해 $\alpha < -1$ 일 때, $\alpha - \beta$ 를 r 에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2-3] <제시문1>의 α, r , 점 P , 그리고 점 $Q(-2, 2)$ 에 대해 $\alpha < -1$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 r 에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2-4] <제시문1>의 α 와 r 에 대해 $\alpha < -1$ 일 때, α 를 한 근으로 갖는 2차방정식을 $2x^2 + b_1x + b_0 = 0$ 이라고 하자. 이 때, b_0, b_1 의 값을 r 에 대한 식으로 표시하고, 그 이유를 논하시오.

[44] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

21 성균관대 자연2

<제시문1>

중심의 좌표가 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

<제시문2>

초점이 $(0, p)$ 이고 준선이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

<제시문3>

원 $C: (x - 12)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = 36$ 위의 임의의 점을 A , 포물선 $P: y = x^2$ 위의 임의의 점을 B 라고 하자.

[수학 1-1] <제시문3>에서 원 C 의 중심과 점 B 사이의 거리가 항상 원 C 의 반지름보다 큼을 보이고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-2] <제시문3>의 두 점 A, B 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 점 A 와 점 B 를 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-3] 문항 [수학 1-2]에서 구한 점 B 에서 <제시문3>의 원 C 에 그은 두 접선의 방정식을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-4] 문항 [수학 1-3]에서 구한 두 접선이 이루는 각의 크기를 θ (단, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라고 할 때, $\sin \theta$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문1>

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x), g(x)$ 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

<제시문2>

실수 e 를 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 로 정의한다.

<제시문3>

함수 $f(x), g(x)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ (L, M 은 실수)일 때, a 에 가까운 모든 실수 x 에서 함수 $h(x)$ 가 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고 $L = M$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ 이다.

<제시문4>

곡선 $y = \frac{1}{x}$ (단, $x > 0$), 직선 $x = 1$, 직선 $y = \frac{1}{a}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 $f(a)$ 라 한다. 직선 $x = 1$, 직선 $x = a$, 직선 $y = \frac{1}{a}$, 직선 $y = 0$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $g(a)$ 라 한다. 함수 h 를 $h(a) = f(a) - g(a)$ 라 정의한다. (단, $a > 1$)

[수학 2-1] <제시문4>에서 정의된 $h(a)$ 를 a 에 관한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-2] <제시문4>에서 정의된 $h(a)$ 의 최솟값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-3] <제시문4>에서 정의된 $h(a)$ 에 대하여, 극한 $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{h(a)}{a-1}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 로피탈의 정리는 사용할 수 없음)

[수학 2-4] <제시문4>에서 정의된 $h(a)$ 가 $a > 1$ 에서 부등식 $h(a) < 2\sqrt{a}$ 을 만족함을 보이고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-5] <제시문4>에서 정의된 $h(a)$ 에 대하여, 극한 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{h(a)}{a}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 로피탈의 정리는 사용할 수 없음)

[46] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

21 성균관대 자연3

<제시문1>

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

<제시문2>

곡선 $E: y = -x^2 + 4$ (단, $x \geq 0, y \geq 0$)가 x 축과 만나는 점을 P , y 축과 만나는 점을 Q 라고 하고, 곡선 E 및 x 축과 y 축으로 둘러싸인 도형을 D 라고 하자. 또한 원점 O 를 포함하는 선분 OP 위의 임의의 점을 A , 선분 OQ 위의 임의의 점을 B 라고 하자.

[수학 1-1] <제시문2>의 두 점 A 와 B 를 지나고 도형 D 의 넓이를 이등분하는 직선 중 원점 O 와의 거리가 가장 가까운 직선 l_1 과 가장 먼 직선 l_2 의 방정식을 각각 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-2] 문항 [수학 1-1]에서 구한 직선 l_1 위의 점 중에서 원점 O 와의 거리가 최소인 점을 C_1 , 문항 [수학 1-1]에서 구한 직선 l_2 위의 점 중에서 원점 O 와의 거리가 최소인 점을 C_2 라고 할 때, 삼각형 OC_1C_2 의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-3] 포물선 $y = -x^2 + 4$ 를 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동하였더니 문항 [수학 1-1]에서 구한 직선 l_1 과 l_2 에 동시에 접하는 포물선 F 를 얻게 되었다. 이때 상수 m, n 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1-4] 문항 [수학 1-3]에서 구한 포물선 F 및 문항 [수학 1-1]에서 구한 직선을 l_1 과 l_2 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문1>

(i) 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 3 & (x \leq 0) \\ \frac{1}{x} + 2 & (x > 0) \end{cases} \text{ 이고, } g(x) = x + 3$$

(ii) 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프를 좌표평면에 그렸을 때 나타나는 세 교점을 왼쪽부터 차례대로 Q_1, Q_2, Q_3 이라고 하자.

(iii) 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) < g(x)) \\ g(x) & (f(x) \geq g(x)) \end{cases}$ 로 정의하자. 이때, $0 < t < 1$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y = t(x+3)$ 과 곡선 $y = h(x)$ 의 교점의 개수를 t 에 대한 함수 $k(t)$ 라 하자.

<제시문2>

(i) 양의 정수 n 에 대하여, 점 $(n, 0)$ 에서 곡선 $y = h(x)$ 에 그은 접선 위의 접점 중 제2사분면에 있는 점을 $P_n(\alpha_n, \beta_n)$ 이라고 하고 이 때의 접선을 l_n 이라 하자.

(ii) 직선 l_n 이 y 축과 만나는 점을 T_n 이라고 하고, 직선 l_n 이 접점 P_n 을 제외한 곡선 $y = h(x)$ 와 다시 만나는 점을 R_n 이라고 하자.

(iii) 직선 l_n , y 축, 곡선 $y = h(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_n 이라고 하자.

[수학 2-1] <제시문1>에서 세 교점 Q_1, Q_2, Q_3 의 좌표를 모두 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2-2] <제시문1>에서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형을 그리고, $0 < t < 1$ 인 실수 t 의 범위에 따른 함수 $k(t)$ 의 값을 표로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2-3] <제시문2>에서 α_n, β_n 을 각각 n 에 대한 식으로 나타내고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2-4] <제시문2>에서 점 T_n 의 y 좌표, 점 R_n 의 x 좌표, 넓이 S_n 을 각각 α_n, β_n 에 대한 식으로 나타낸 후 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[48] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

22 성균관대 모의

<제시문1>

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 이은 선분 AB 를 $m:n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점 P 의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right) \text{ (단, } m \neq n \text{)}$$

<제시문2>

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대라 하며, $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다. 또, $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소라 하며, $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

<제시문3>

삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 가 서로 다른 두 개의 극값을 $x=\alpha$ 와 $x=\beta$ 에서 가진다고 한다. 이때, 두 점 $A(\alpha, f(\alpha))$ 와 $B(\beta, f(\beta))$ 를 잇는 선분 AB 를 고려한다. (단, a 와 b 는 정수이고, $\alpha < \beta$ 이다.)

(1) <제시문3>에서 직선 AB 의 기울기 값이 $-\frac{2}{9}$ 보다 크기 위한 정수 a 와 b 가 존재하지 않음을 보이고, 그 이유를 논하시오. (10점)

(2) <제시문3>에서 $-5 \leq a \leq 5, -5 \leq b \leq 5$ 일 때, 선분 AB 가 x 축과 만나지 않도록 하는 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

(3) <제시문3>에서 $-3 \leq a \leq 3, -3 \leq b \leq 3$ 일 때, 선분 AB 를 삼등분하는 두 점을 C 와 D 라고 하자. 선분 CD 가 y 축과 만나지 않도록 하는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

<제시문2>

함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 (a) 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다. (b) 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이다. 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

<제시문3>

양의 정수 n 과 실수 a 에 대해 함수 $f(x) = a|x|^n - \frac{n-1}{4}$ 과 사차함수 $g(x) = x^4 - x^2$ 을 정의한다.

(1) <제시문3>에서 $n=1$ 일 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3개보다 많기 위한 실수 a 값의 범위를 구하고, 그 이유를 논하시오. (5점)

(2) <제시문3>에서 $n=2$ 이고 $a=4$ 일 때, 두 개의 곡선 $y=f(x)$ 와 $4x+8y=1$ 에 의해 둘러싸인 도형의 내부와 둘레의 점들 중, x 좌표의 값이 음수인 점들의 집합을 S 라고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(c, f(c)) \left(0 < c < \frac{1}{4}\right)$ 를 지나고 그 점에서의 접선에 수직인 직선이 집합 S 에 속하는 점 P 를 지날 때, 점 P 와 점 $Q\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ 를 지나는 직선의 기울기의 최댓값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

(3) <제시문3>에서 $n=3$ 이고 $a>0$ 일 때, 점 $P(0, -2)$ 에서 두 곡선 $f(x)$ 와 $y=g(x)$ 에 그린 4개의 접선의 접점을 생각하자. 이 4개의 접점과 점 P 를 모두 동시에 지나는 원이 존재할 때, 상수 a 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

[50] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

22 성균관대 자연 1교시

<제시문 1>

첫째항에 차례로 일정한 수를 더하여 얻어진 수열을 등차수열이라 하고, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 그리고, 첫째항에 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어진 수열을 등비수열이라 하고, 그 일정한 수를 공비라고 한다.

<제시문 2>

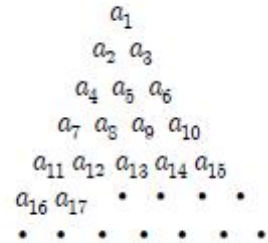
자연수의 거듭제곱의 합은 다음의 등식으로 구할 수 있다.

$$(i) 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<제시문 3>

수열 $\{a_n\}$ 을 오른쪽 그림과 같이 삼각형 모양으로, 가장 위 꼭짓점에서부터 출발하여 왼쪽에서 오른쪽으로, k 번째 줄에는 k 개씩 배열하자. 그리고 모든 양의 정수 n 에 대하여, 이 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 한다.



(1) <제시문3>에서 모든 양의 정수 n 에 대하여 $S_n = n^2 + n + 1$ 일 때, 삼각형의 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문3>에서 수열 $\{a_n\}$ 을 삼각형 모양으로 배열할 때, 짝수번째 줄의 배열은 역순으로 하자. 예를 들어, 두 번째 줄은 a_2, a_3 이 아니라 a_3, a_2 로 재배열하고, 네 번째 줄은 a_7, a_8, a_9, a_{10} 이 아니라 a_{10}, a_9, a_8, a_7 로 재배열한다. (1)에서와 같이 모든 양의 정수 n 에 대하여 $S_n = n^2 + n + 1$ 일 때, 삼각형의 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 합을 구하고, 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문3>에서 모든 양의 정수 n 에 대하여 $S_n = 2^n$ 이고, 수열 $\{a_n\}$ 을 삼각형 모양으로 배열할 때, (2)에서와 같이 짝수번째 줄의 배열은 역순으로 하자. 이때 삼각형의 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 곱을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[51] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<제시문1>

(i) 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & (x \leq 0) \\ x^2 - x & (x > 0) \end{cases}$$

(ii) 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자. $g(0)=0$ 이며, 0이 아닌 실수 b 에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선이 접점을 제외한 곡선 $y=f(x)$ 와 다시 만나는 점의 x 좌표를 $g(b)$ 로 한다.

(iii) 함수 $h(x)$ 를 함수 $g(x)$ 의 역함수로 정의하자.

<제시문2>

(i) $x_0 = 1$ 로 놓고, 양의 정수 n 에 대하여, $x_{n+1} = h(x_n)$ 으로 정의하자.

(ii) 음이 아닌 정수 n 에 대하여, $y_n = f(x_n)$ 으로 정의하고, 점 P_n 을 (x_n, y_n) 으로 놓자.

(iii) 음이 아닌 정수 n 에 대하여, 점 P_n 과 점 P_{n+1} 을 잇는 직선의 방정식을 $y = L_n(x)$ 로 놓자.

(iv) 음이 아닌 정수 n 에 대하여, 직선 $y = L_n(x)$ 와 곡선 $y = f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n 이라고 하자.

(1) <제시문1>에서 정의된 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 를 모두 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2) 음이 아닌 정수 m 에 대하여, <제시문2>에 주어진 함수 $L_{2m}(x)$ 와 $L_{2m+1}(x)$ 의 모든 계수를 α 와 m 에 대한 식으로 표시하고, 그 이유를 논하시오. (단, α 는 $1 - \sqrt{2}$ 이다.)

(3) 음이 아닌 정수 m 에 대하여, <제시문2>에 주어진 A_{2m} 과 A_{2m+1} 을 모두 α 와 m 에 대한 식으로 표시하고, 그 이유를 논하시오. (단, α 는 $1 - \sqrt{2}$ 이다.)

(4) 음이 아닌 정수 m 에 대하여 $\frac{A_{2m+1}}{A_{2m}}$ 의 값을 구하고, m 에 관계없이 항상 일정함을 논하시오.

[52] 다음 <제시문1>~<제시문3>을 읽고 (1)~(4)를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수다. 기울기가 양수이고 원점을 지나는 직선 L 이 $y=f(x)$ 에 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 에 접한다. 그리고 L 과 평행인 직선이 $y=f(x)$ 와 $(c, f(c))$ 에 접한다. (단, a, b, c 는 $0 < a < c < b$ 를 만족하는 실수이다.)

<제시문2>

<제시문1>에서 주어진 함수 $f(x)$ 와 a, b, c 에 대하여 $c < x < b$ 를 만족하며 $f'(x)$ 가 최대가 되게 하는 x 의 값을 d 라 하자.

<제시문3>

<제시문1>에서 주어진 함수 $f(x)$ 와 a, b, c 에 대하여 두 점 $(c, f(c))$ 와 $(b, f(b))$ 를 잇는 직선이 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 $(e, f(e))$ 라 하자. (단, e 는 $c < e < b$ 를 만족하는 실수이다.)

(1) <제시문1>에서 주어진 c 를 a, b 로 표현하고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문2>에서 주어진 d 를 a, b 로 표현하고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문3>에서 주어진 e 를 a, b 로 표현하고 그 이유를 논하시오.

(4) <제시문1>~<제시문3>에서 주어진 a, b, d, e 에 대해 $\frac{e-d}{b-a}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[53] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<제시문1>

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대라 하며, $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다. 또한, $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소라 하며, $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

<제시문2>

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 함수 $F(x)$ 가 $f(x)$ 의 한 부정적분일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

<제시문3>

임의의 실수 a, b, c 에 대해, 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 그래프는 $y=|x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 각각 a 와 b 만큼 평행이동한 것이라 하고, 함수 $u(x)$ 의 그래프는 $y=-|x|$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이라 하자.

(1) <제시문3>에서 $a=1$ 이고 $c<0$ 이라고 가정하자. 두 함수 $y=2x(x-2)g(x)$ 와 $y=u(x-1)$ 의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가질 때, 두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문3>에서 양의 실수 a 에 대하여 함수 $y=(x-a)g(x)$ 의 역함수를 $y=w(x)$ 라고 하자. 두 곡선 $y=(x-a)g(x)$, $y=w(x)$ 및 직선 $y=-x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(a)$ 라고 할 때, $\sum_{k=1}^{12} S(k)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문3>에서 고정된 실수 a 에 대해 $\int_0^b (x-a)^2 g(x)dx = \int_0^a (x-b)^2 h(x)dx$ 가 성립할 때, 가능한 모든 b 의 값의 곱을 a 에 관한 식으로 나타내고 그 이유를 논하시오.

[54] 다음 <제시문1>~<제시문2>를 읽고 (1)~(3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>

- (i) $f(x), g(x), h(x)$ 는 이차함수이다.
- (ii) $f(x), g(x)$ 는 $f(0) = f(1) = g(2) = 0$ 와 $f''(0) = -2$ 를 만족한다.
- (iii) $F(x)$ 는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 1) \\ g(x) & (1 < x \leq 2) \\ h(x) & (x > 2) \end{cases}$$

- (iv) $F(x)$ 는 모든 실수에서 미분가능하며 최댓값이 2이다.

<제시문2>

정의역이 음이 아닌 실수의 집합인 함수 $k(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

음이 아닌 실수 x 에 대하여 $k(x)$ 는 두 점 $(-1, 0)$ 과 $(x, F(x))$ 을 지나는 직선의 기울기이다. (단, $F(x)$ 는 <제시문1>에서 정의된 함수이다.)

(1) <제시문1>에서 정의된 함수 $F(x)$ 의 식을 찾고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문1>에서 정의된 함수 $F(x)$ 에 대하여 점 $(-1, 0)$ 에서 $y = F(x)$ 에 접선을 그을 때 가능한 접점의 x 좌표들 중 양수인 것을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 수를 차례로 a, b, c 라 하자. 이때 함수 $G(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$G(x) = \begin{cases} a - |x - a| & (x \leq 2a) \\ b - |x - 2a - b| & (2a < x \leq 2a + 2b) \\ c - |x - 2a - 2b - c| & (x > 2a + 2b) \end{cases}$$

<제시문2>에서 정의된 함수 $k(x)$ 에 대하여, 합성함수 $(k \circ G)(x)$ 가 열린구간 $(0, 2a + 2b + 2c)$ 에서 9개의 극댓값을 갖게 되는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하시오, (단, 주사위의 각 면에 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 정육면체이다.)

[55] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 다음의 조건들을 만족한다.

(i) a 는 0이 아닌 정수이고, b 와 c 는 모두 정수이다.

(ii) $b^2 - 4ac = 1$

(1) 1보다 큰 자연수 N 에 대하여, <제시문>에 주어진 이차함수 $f(x)$ 가 두 조건 $f(0) < 0$ 와 $f(N) > 0$ 를 동시에 만족할 수 있는지에 대하여 논하시오.

(2) 1보다 큰 자연수 N 과 <제시문>에 주어진 이차함수 $f(x)$ 에 대하여, $a < 0$ 이고 $f\left(\frac{1}{N}\right) > 0$ 일 때, 가능한 이차함수 $f(x)$ 를 모두 구하고, 그 이유를 논하시오.

(3) 1보다 큰 홀수 M 과 <제시문>에 주어진 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0) < 0$ 이고 $f\left(\frac{2}{M}\right) > 0$ 일 때, 가능한 이차함수 $f(x)$ 를 모두 구하고, 그 이유를 논하시오.

(4) $N = 100$ 일 때 (2)에서 구한 이차함수 중 하나를 $Q(x)$ 라 하고, $M = 19$ 일 때 (3)에서 구한 이차함수 중 하나를 $R(x)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여 $Q(n)$ 이 어떤 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같고, $R(n)$ 은 어떤 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같다고 하자. 이때 가능한 모든 수열 $\{a_n\}$ 과 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여, $\sum_{n=1}^{10} |a_n - b_n|$ 의 최솟값과 최댓값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[56] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [1 - i] ~ [1-iii]을 문항별로 풀이와 함께
답하시오. 23 성균관대 모의

<제시문 1>

자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려
면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(a) $n = 1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(b) $n = k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 일 때에도 명제
 $p(n)$ 이 성립한다.

<제시문 2>

두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 와 사건 B 가 일어나는
경우의 수를 각각 m, n 이라고 하면 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의
수는 $m + n$ 이다.

<제시문 3>

두 정수 a 와 b 에 대하여 이차방정식 $x^2 + ax - b = 0$ 의 두 근을 α 와 β 라고
할 때 (단, $\alpha \leq \beta$), 모든 자연수 n 에 대하여

$$f_n = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \beta^k = \alpha^n + \alpha^{n-1} \beta + \cdots + \alpha \beta^{n-1} + \beta^n$$

으로 정의하자.

[1 - i] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$ 에 대하여,

$f_{n+2} = -af_{n+1} + bf_n$ 이 모든 자연수 n 에 대해 성립함을 보이시오. (10점)

[1 - ii] <제시문 1>의 수학적 귀납법을 이용하여 <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$ 의 모
든 항이 정수라는 사실을 보이시오. (10점)

[1 - iii] 동전을 5번 던져 앞면이 a 번 나오고 뒷면이 b 번 나왔다고 할 때, 절댓값 $|f_5|$ 의 값
이 1000보다 클 경우의 수를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[57] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [2 - i] ~ [2-iii]을 문항별로 풀이와 함께
 23 성균관대 모의

<제시문 1>

자연수의 거듭제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

<제시문 2>

첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열의 제 n 항을 l 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.

<제시문 3>

음이 아닌 정수 x 가, 음이 아닌 정수 a 와 b 에 대해 $3x = 15a - 25b - 2$ 를 만족할 때, 이러한 모든 x 의 집합을 S 라고 하자. 그리고, 집합 S 의 원소를 작은 수부터 차례대로

$a_1, a_2, a_3, \dots$ 로 나타내자.

[2- i] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, a_{100} 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

[2- ii] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $\sum_{n=11}^{20} a_n^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{20}^2$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[2- iii] <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$ 과 상수 c 에 대하여, 일반항이 $b_n = a_n - c(n-1)$ 인 수열 $\{b_n\}$ 을 정의하고, 이 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 T_n 이라고 하자. 비 $T_n : T_{2n}$ 이 n 의 값에 관계없이 일정하기 위한 c 의 값을 모두 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

[58] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 [3- i] ~ [3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. 23 성균관대 모의

<제시문 1>

실수 x 의 절댓값 $|x|$ 는 수직선 위에서 실수 x 를 나타내는 점과 원점 사이의 거리를 나타낸다. 예를 들어, $|x|=5$ 이면 $x=5$ 또는 $x=-5$ 이다.

<제시문 2>

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대라 하며, $f(a)$ 를 극댓값이라고 한다. 또, $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소라 하며, $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

<제시문 3>

<제시문 1>을 이용하여 실수 전체에서 정의되는 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{cases} f(x) = x - |x+2| + |x+1| - |x-1| + |x-2| \\ g(x) = |x|^3 - x^2 \end{cases}$$

그리고, 이 두 함수의 합성함수를 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 라고 하자.

[3- i] <제시문 3>에서 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대일 때, 가능한 a 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

[3-ii] <제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대이기 위한 a 의 절댓값의 합과 $x=b$ 에서 극소이기 위한 b 의 절댓값의 합을 각각 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

[3-iii] <제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$ 에 대하여 정적분 $\int_{-2}^2 h(x)dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[59] 다음 <제시문1>~<제시문4>를 읽고 <문제1-(1)>~<문제1-(3)>을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(30점) 23 성균관대 자연1

<제시문1>

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

<제시문2>

중심의 좌표가 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

<제시문3>

두 직선 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ 에서 $mm' = -1$ 이면 두 직선은 서로 수직이다.

<제시문4>

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C 라 한다. $-1 < x < 0$ 에서 정의된 곡선 $y = (x+1)^2$ 위의 점 P 에서의 접선을 L 이라 하자. 또한, 점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 원 C 와 만나는 두 점 중, x 좌표가 음수인 점을 A , x 좌표가 양수인 점을 B 라고 한다.

(1) <제시문4>에서 정의된 점 P 와 직선 L 에 대해서, 원점 O 와 점 P 를 연결하는 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 일 때, 직선 L 이 원 C 와 만나는 두 점을 E, F 라 하자. $\overline{EF}^2$ 을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문4>에서 정의된 점 P 와 직선 L 에 대해서 $\overline{OP}$ 가 최소가 될 때 직선 L 과 선분 OP 가 수직임을 보이고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문4>에서 정의된 점 P, A, B 와 직선 L 에 대해서, $\overline{AP} \times \overline{PB}$ 가 최댓값을 가질 때 직선 L 과 선분 OP 가 수직임을 보이고 그 이유를 논하시오.

[60] 다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 <문제2-(1)>~<문제2-(4)>을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(40점) 23 성균관대 자연1

<제시문1>

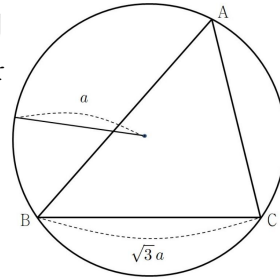
삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이 R 에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$

<제시문2>

그림과 같이 양의 실수 a 에 대해 반지름이 a 인 원에 내접하는 삼각형 ABC 가 다음 세 가지 조건을 만족한다.

- (1) $\overline{BC} = \sqrt{3}a$
- (2) $\angle A < 90^\circ$
- (3) $0 < \overline{AC} \leq \overline{AB}$



(1) <제시문2>의 삼각형 ABC 에 대해 $\angle A$ 를 구하고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문2>의 삼각형 ABC 에 대해 $a = 10$ 일 때, $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 가 모두 정수가 되는 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 의 값을 모두 찾고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문2>의 삼각형 ABC 에 대해 $a = \sqrt{10}$ 이라 하자. 2023 이하인 자연수 M 에 대해, $\overline{AB} + \overline{AC} = M$ 을 만족하는 순서쌍 $(\overline{AB}, \overline{AC})$ 가 존재하는 모든 M 의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.

(4) <제시문2>의 삼각형 ABC 에 대해 $a = \sqrt{2}$ 라 하자. 2023 이하인 자연수 N 에 대해, $\overline{AB}^2$ 과 $\overline{AC}^2$ 은 정수가 아니고 $\overline{AB} \times \overline{AC} = N$ 을 만족하는 순서쌍 $(\overline{AB}^2, \overline{AC}^2)$ 이 존재하는 모든 N 의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.

[61] 다음 <제시문1>~<제시문3>을 읽고 <문제3-(1)>~<문제3-(3)>을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점) 23 성균관대 자연1

<제시문1>

제시문 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(a) $n=1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(b) $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때에도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

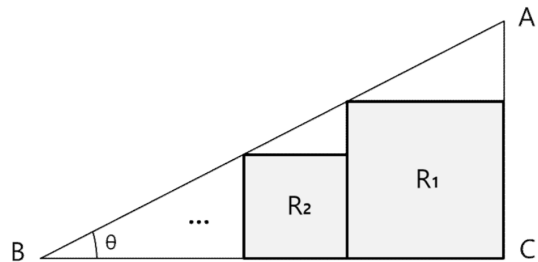
<제시문2>

삼각함수 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

<제시문3>

삼각형 ABC 는 $\angle ACB = 90^\circ$ 이고 $\angle ABC = \theta$ 인 직각삼각형이다. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC 의 내부에 정사각형 $R_1, R_2, R_3, \dots$ 을 계속해서 만들어 나간다. 이때, 정사각형 R_n 의 넓이를 s_n 이라고 하자. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 이와 같이 정의된 정사각형 $R_1, R_2, \dots, R_n$ 중에서, 모든 홀수 번째 정사각형의 넓이의 합을 P_n 이라 하고 모든 짝수 번째 정사각형의 넓이의 합을 Q_n 이라 하자. (단, 정사각형 R_1 의 한 변의 길이는 1이다.)



(1) <제시문3>에서 정의된 수열 $\{s_n\}$ 과 $t = \tan\theta$ 에 대해, 일반항 s_n 을 n 과 t 에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문3>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $\frac{P_{2023}}{Q_{2023}} + \frac{Q_{2021}}{P_{2021}}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문3>에서 정의된 2023개의 정사각형 $R_1, R_2, \dots, R_{2023}$ 중에서, 1012개의 홀수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{P_{2023}}{1012}$ 과 1011개의 짝수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\frac{Q_{2023}}{1011}$ 의 대소관계를 <제시문1>의 수학적 귀납법과 <문제3-(2)>를 이용하여 판단하고, 그 이유를 논하시오.

[62] 다음 <제시문1>~<제시문3>을 읽고 <문제4-(1)>~<문제4-(3)>을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점) 23 성균관대 자연2

<제시문1>

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하며, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 제 n 항에 공차 d 를 더하면 제 $(n+1)$ 항이 되므로 다음이 성립한다.

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

<제시문2>

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하며, 그 일정한 수를 공비라고 한다. 공비가 $r(r \neq 0)$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 제 n 항에 공비 r 를 곱하면 제 $(n+1)$ 항이 되므로 다음이 성립한다.

$$a_{n+1} = ra_n \quad (r \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

<제시문3>

세 개의 정수로 이루어진 순서쌍의 집합 M 을 다음과 같이 정의하자.

$$M = \{(a, b, c) | a, b, c \text{는 정수이고 } 1 \leq |a|, |b|, |c| \leq 100\}$$

이때, 집합 M 의 개수는 200^3 이다.

(1) 삼각형 세 변의 길이가 각각 100이하의 자연수이면서 등차수열을 이루는 삼각형의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 합동인 두 삼각형은 한 개의 삼각형으로 간주한다.)

(2) 삼각형 세 변의 길이가 각각 100이하의 자연수이면서 등비수열을 이루는 삼각형의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 합동인 두 삼각형은 한 개의 삼각형으로 간주하며, $\sqrt{5} = 2.236 \dots$ 이다.)

(3) <제시문3>에서 정의된 집합 M 의 원소 (a, b, c) 중에서 다음의 조건을 모두 만족하는 모든 원소의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

(가) a, b, c 는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) a, b, c 는 일렬로 나열하여 적어도 한 개의 등비수열을 만들 수 있다. 예를 들어, $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ 인 경우 a, b, c 를 일렬로 나열하는 방법은 다음의 여섯 가지가 있다.

- ① 1, 2, 3 ② 1, 3, 2 ③ 2, 1, 3 ④ 2, 3, 1 ⑤ 3, 1, 2 ⑥ 3, 2, 1

[63] 다음 <제시문1>, <제시문2>를 읽고 <문제5-(1)>~<문제5-(3)>을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점) 23 성균관대 자연2

<제시문1>

모든 실수 x 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

<제시문2>

모든 실수 x 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(1) 방정식 $4\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = 1$ 이 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 해를 갖도록 하는 2023 이하의 자연수 n 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

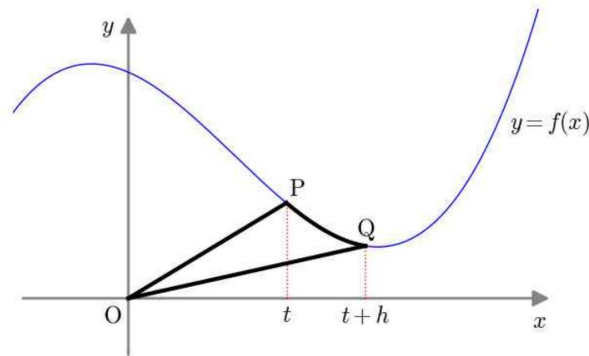
(2) 방정식 $6\cos^2\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = 5$ 가 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 해를 갖도록 하는 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, m, n 은 23 이하인 자연수이다.)

(3) 방정식 $8\cos^4\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 7\cos^2\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = 1$ 이 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 해를 갖도록 하는 2023 이하의 자연수 n 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

[64] 다음 <제시문1>, <제시문2>를 읽고 <문제6-(1)>~<문제6-(4)>을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점) 23 성균관대 자연2

<제시문1>

상수 a, b, c, d 에 대하여 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 있다. (단, a, d 는 양수). 실수 t 와 양수 h 에 대해 원점 O 와 두 점 $p(t, f(t))$, $Q(t+h, f(t+h))$ 를 각각 잇는 선분 OP , OQ 가 있다. 다음 그림과 같은 방식으로 $y = f(x)$ 의 그래프의 점 P 에서 점 Q 까지의 부분과 선분 OP , OQ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $p(h)$ 라 하고 $A(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p(h)}{h}$ 라 하자.



<제시문2>

<제시문1>에서 정의된 함수 $A(t)$ 가 다음의 조건을 모두 만족한다.

(가) 방정식 $A(t) = 0$ 이 두 개의 실근 α 와 β 만을 갖는다. (단, $\alpha < \beta$).

(나) 함수 $A(t)$ 는 $t = \beta$ 에서 미분가능하지 않다.

(다) 함수 $A(t)$ 는 극댓값 16을 갖는다.

(라) $\int_0^{2\beta} A(t)dt = 38$ 이다.

(1) <제시문 1>에서 주어진 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx$ 의 값을 a, b, c, d 를 사용하여 표현하고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$ 를 a, b, c, d 와 t 를 사용하여 표현하고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$ 가 <제시문 2>의 조건을 만족할 때, α, β 와 a 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(4) <제시문 1>에서 주어진 함수 $f(x)$ 가 $\int_0^1 f(x)dx = 23$ 을 만족하고 <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$ 가 <제시문 2>의 모든 조건을 만족할 때, a, b, c, d 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[65] 다음 <제시문 1>과 <제시문 2>를 읽고 (1)~(3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

24 성균관대 모의

<제시문 1>

$0 \leq k < 1$ 일 때, 곡선 $y = x - x^2$ 위의 점 $P(k, k - k^2)$ 에서 이 곡선에 접하는 접선을 ℓ 이라 하고, 직선 ℓ 이 곡선 $y = x^2 - x$ 와 제1사분면에서 만나는 점을 $Q(\alpha, \beta)$ 라고 하자.

<제시문 2>

곡선 $y = x - x^2$, 선분 PQ , 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A(k)$ 라고 놓고, 곡선 $y = x^2 - x$ 와 직선 ℓ 로 둘러싸인 영역 중에서 직선 $x = 1$ 의 오른쪽에 있는 부분의 넓이를 $B(k)$ 라고 놓자.

(1) <제시문 1>에서 주어진 k 의 값이 0 일 때, <제시문 2>에서 정의된 $A(0)$ 과 $B(0)$ 에 대하여, 이들의 비 $A(0) : B(0)$ 이 어떻게 되는지 논하여라.

(2) <제시문 2>의 함수 $B(k)$ 를 k 와 α 에 대한 다항식의 형태로 나타내어라.

(3) <제시문 2>의 함수 $B(k)$ 와 2 보다 크거나 같은 정수 n 에 대하여, $B\left(\frac{1}{n}\right)$ 의 값이

$C + D\sqrt{n^2 - 2n + 2}$ (C 와 D 는 유리수) 형태로 표시됨을 보이고, D 는 항상 양수가 됨을 논하여라.

[66] 다음 <제시문 1> ~ <제시문 3>을 읽고 (1)~(3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

24 성균관대 모의

<제시문 1>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

<제시문 2>

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은 다음과 같다.

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} & (r \neq 1 \text{ 일 때}) \\ na & (r = 1 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

<제시문 3>

양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.
(단, A, B 는 상수이고, $A > 1$ 이다.)

- 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(Ax) = Af(x)$ 이 성립한다.
- 닫힌 구간 $[1, A]$ 에서 $f(x) = B - \frac{2B}{A-1} \left| x - \frac{A+1}{2} \right|$ 이다.

(1) <제시문 3>의 함수 $f(x)$ 에 대하여, $A=3$ 이고 $B=1$ 일 때, 정적분 $\int_{\frac{2}{3}}^9 f(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하여라.

(2) 삼차함수 $g(x) = x^3 - 9x^2 + 18x$ 와 <제시문3>의 함수 $f(x)$ 에 대하여 $A=2$ 이고 $B=\frac{1}{2}$ 일 때, 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 $x=a$ 에서 극솟값을 가진다고 한다. $1 \leq a \leq 100$ 일 때 가능한 a 값의 개수를 구하고 그 이유를 논하여라.

(3) <제시문 3>의 함수 $f(x)$ 에 대하여, 수열 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 을 $a_n = \int_{A^{n-1}}^{A^n} f(x)dx$ 로 정의하자. 수열의 각 항 a_n 에 대해 $\log_3 a_n$ 의 값이 모두 정수이고 다음의 두 조건

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{n=1}^6 \log_3 a_n = 117 & \cdot 37 < \log_3 \left(\sum_{n=1}^6 a_n \right) < 38 \end{aligned}$$

을 만족할 때, 가능한 순서쌍 (A, B) 를 모두 구하고 그 이유를 논하여라.

[67] 다음 <제시문 1>과 <제시문 2>를 읽고 (1)~(3)을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

24 성균관대 모의

<제시문 1>

모든 자연수 n 에 대하여, a_n 을 $\frac{54484}{333333}$ 의 소수점 n 번째 자리의 수로 정의하고, 양의 정수 집합에서 정의되는 함수 $f(n)$ 을 $f(n) = a_n - a_{n+4}$ 로 정의하자.

<제시문 2>

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = x - x^2$ 으로 정의하고, 1 보다 크거나 같은 실수 x 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$h(x) = \begin{cases} f(1)g(x-1), & 1 \leq x < 2 \\ f(2)g(x-2), & 2 \leq x < 3 \\ f(3)g(x-3), & 3 \leq x < 4 \\ f(4)g(x-4), & 4 \leq x < 5 \\ f(5)g(x-5), & 5 \leq x < 6 \\ f(6)g(x-6), & 6 \leq x < 7 \\ h(x-6), & 7 \leq x \end{cases}$$

(1) $1 \leq n \leq 20$ 에 대하여, <제시문 1>의 수열 a_n 의 값과 $f(n)$ 의 값을 표로 나타내고, <제시문 2>의 함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형에 대하여 논하여라.

(2) 구간 $1 < x < 100$ 에서 <제시문 2>의 함수 $h(x)$ 의 미분불가능한 점의 개수에 대하여 논하여라.

(3) <제시문 2>의 함수 $h(x)$ 에 대하여, $\square \int_1^{100} h(x)dx$ 의 값에 대하여 논하여라.

[68] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

24 성균관대 오전

<제시문 1>

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의
접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 이다.

<제시문 2>

좌표평면 위의 네 점 A, B, C, D가 다음의 조건을 만족한다.

- 점 A는 곡선 $y=\sqrt{x-1}$ 위의 점이다. (단, $x \geq 1$)
- 점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이다.
- 점 C는 직선 $y=0$ 위의 점이다.
- 점 D는 곡선 $y=2x^2-30x+113$ 위의 점이다.

(1) 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 이 곡선 위에 있지 않은 점 P가 주어져 있다. 이 곡선 위의 점 중에서 주어진 점 P까지의 거리가 최소가 되는 점을 Q라고 하자. 이때, 점 Q에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 접선이 직선 PQ에 수직인 이유를 논하시오.

(2) 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 에 대하여, 곡선 $y=g(x)$ 와 곡선 $y=h(x)$ 가 서로 만나지 않는다고 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 Q와 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 R에 대해 선분 QR의 길이가 최소일 때, 점 Q에서 곡선 $y=g(x)$ 에 접하는 접선과 점 R에서 곡선 $y=h(x)$ 에 접하는 접선이 모두 직선 QR에 수직인 이유를 논하시오.

(3) <제시문2>의 네 점 A, B, C, D에 대해 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$ 의 값이 최소가 될 때, 점 D의 x 좌표와 점 A의 y 좌표의 차가 6이라고 한다. 이때, 점 A와 D의 좌표를 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문 1>

기울기가 양수이고 서로 평행인 두 직선 L_1 과 L_2 의 y 절편을 각각 p 와 0 이라 하자. (단, $p > 0$) 직선 L_1 이 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 만나는 두 점을 x 좌표의 값이 작은 것부터 A , D 라 하고, 직선 L_2 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 만나는 두 점을 x 좌표의 값이 작은 것부터 B , C 라 하자. 사각형 $ABCD$ 의 두 대각선의 교점을 P , 선분 AD 의 중점을 M_1 , 선분 BC 의 중점을 M_2 라 하자.

<제시문 2>

이차함수 $y = x^2$ 과 반지름이 r 인 원이 다음 세 조건을 만족시킨다.

- 원의 중심의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수이다.
- 이차함수 $y = x^2$ 과 원이 서로 다른 네 점에서 만나고, 교점의 y 좌표는 모두 정수이다.
- 네 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이다.

<제시문 3>

최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $y = g(x)$ 가 $g(x) = g(-x)$ 를 만족하고, x 축과 x_1, x_2, x_3, x_4 에서 만난다. 또한, 사차함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프가 서로 다른 네 점 Q, R, S, T 에서 만난다고 가정하자.

(단, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 이고, $x_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 는 정수가 아니다.)

(1) <제시문 1>에서 $\overline{PM_1} = 5$ 이고 $\overline{PM_2} = 1$ 일 때, 사각형 $ABCD$ 의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문 2>에서 $r = 4$ 일 때, 사다리꼴의 넓이를 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) 양의 정수 m, n 에 대해 <제시문 3>에서 $x_3 = \sqrt{m}$, $x_4 = \sqrt{n}$ 이고, 네 점 Q, R, S, T 를 지나는 원의 반지름이 10 이라 하자. 이때, <제시문 3>을 만족하는 양의 정수 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

<제시문 1>

함수 $h(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=h(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |h(x)| dx$$

<제시문 2>

정수 계수를 갖는 두 이차함수

$$f(x) = -Ax^2 + Bx + C, \quad g(x) = -px^2 + qx + r$$

가 다음의 다섯 조건을 만족시킨다.

- A, B, C, p, q, r 는 모두 양수이고, $B > C$ 이다.
- $B^2 + 4AC = 100$ 이고 $q^2 + 4pr$ 는 완전제곱수이다.
- 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $R(0, r)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 교점을 $P(\alpha, 0)$ 이라고 하자.
- 점 $R(0, r)$ 를 지나고 직선 PR 에 수직인 직선이 x 축과 만나는 교점을 $Q(\beta, 0)$ 이라고 하자.
- α 와 β 는 이차방정식 $f(x)=0$ 의 해이다.

(1) <제시문 2>에 주어진 α, β 를 q, r 에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문 2>를 만족시키는 모든 순서쌍 (A, B, C) 와 각각의 순서쌍에 대해 p 의 값이 최소가 되도록 하는 순서쌍 (p, q, r) 를 찾고, 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문 2>에서 직선 PR 와 곡선 $y=g(x)$ 및 x 축($x < 0$)으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

<제시문 1>

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.

<제시문 2>

함수 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$A(x)=x^3-3x^2+2x+8$$

$$B(x)=-x^4+8x^3-22x^2+25x+13$$

$$C(x)=x$$

$$D(x)=-x^2+6x$$

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $0 < x < 3.5$ 인 모든 x 에 대해 다음 부등식을 만족한다.

$$A(x) \leq f(x) \leq B(x)$$

$$C(x) \leq g(x) \leq D(x)$$

(1) <제시문 2>에서 $0 < x < 3.5$ 인 모든 x 에 대해 부등식 $g(x) \leq f(x)$ 가 성립하는 이유를 논하시오.

(2) <제시문 2>에서 $f(1)=8$ 일 때, $f'(1)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) 실수 a 와 <제시문 2>의 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음의 극한값

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)-g(a+5h)}{h}$$

이 존재한다고 하자. 이때, a 의 값과 극한값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(단, $0 < a < 3.5$)

(4) 실수 b 와 <제시문 2>의 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음의 극한값

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+4h)-g(b-3h)-22}{h}$$

이 존재한다고 하자. 이때, 가능한 b 의 값과 극한값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

(단, $0 < b < 3.5$)

<제시문 1>

자연수 n 에 대하여, 수열 $\{t_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자. n 이 홀수일 때 $t_n = 3$ 이고, n 이 짝수일 때 $t_n = 4$ 이다. 점 $P_0(-1, 0)$ 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_1}{12}\pi\right)$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점을 P_1 이라 하자. 자연수 n 에 대하여, 점 P_n 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_{n+1}}{12}\pi\right)$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점을 P_{n+1} 이라 하자. 만약 이 직선이 원과 접할 경우, $P_{n+1} = P_n$ 이다.

<제시문 2>

음이 아닌 정수 n 에 대하여, $A(n)$ 을 삼각형 $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 의 넓이라 하자. (단, 세 점 P_n, P_{n+1}, P_{n+2} 중에서 두 점이 서로 일치할 경우, $A(n) = 0$ 이다.)

(1) $0 \leq n \leq 7$ 인 정수 n 에 대하여 호 $P_n P_{n+2}$ 의 길이가 항상 일정함을 보이고, 그 값을 구하시오. (단, 호 $P_n P_{n+2}$ 는 두 점 P_n, P_{n+2} 에 의하여 나누어지는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 두 부분 중 길이가 짧은 것으로 한다.)

(2) 점 P_{2024} 의 좌표를 구하고, 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문 2>에 주어진 $A(n)$ 의 최댓값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

<제시문 1>

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

<제시문 2>

함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

- 양에서 음으로 바뀌면, $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.
- 음에서 양으로 바뀌면, $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

<제시문 3>

정수 계수를 가지는 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = px^2 + qx + r$$

$$g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

(1) <제시문 3>에서 $f(x) = g'(x)$ 이고 $S_n = f(n)$ 이 어떤 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이라고 한다. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y = h(x)$ 가 다음의 조건을 만족시킬 때,

- $0 \leq x \leq 6$ 에서 $h(x) = g(x)$
- 모든 실수 x 에 대하여 $h(x+6) = h(x) + h(6)$

정적분 $\int_0^8 h(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(2) <제시문 3>에서 $A = q, B = p, C = r(p, q, r \neq 0)$ 이라 하자. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근 α, β (단, $\alpha < \beta$)가 모두 삼차방정식 $g(x) = 0$ 의 해일 때, 정적분

$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

(3) <제시문 3>에서 $C < 0$ 이고 A, B 가 이차방정식 $x^2 + 9C = 0$ 의 두 근일 때, 삼차함수 $y = g(x)$ 는 다음의 조건을 만족시킨다.

- 함수 $y = g(x)$ 가 극값을 가지고, 극댓값은 양수이고 극솟값은 음수이다.
- 함수 $y = g(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는 $24\sqrt{6}$ 이다.

이때, A 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[1]

[수학 1-i]

예시답안 - a_n 의 초기항 a_1 과 a_2 를 구하기 위해 <제시문4>에 있는 a_n 의 정의를 이용한다. 먼저 $n=1$ 인 경우, $x+y+z=1$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z) 는 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 으로 3개다. 따라서 $a_1=3$ 이다.

또 $n=2$ 인 경우, $x+y+z=2$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z) 는 $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ 으로 6개다. 따라서 $a_2=6$ 이다.

채점기준 - <제시문4>에 제시된 상황을 구체적이고 가장 간단한 두 경우에 대해 올바르게 이해하고, 이를 논리적으로 서술할 수 있는지 평가한다.

[수학 1-ii]

예시답안 - 문제에서 z 의 값이 1이상($z \geq 1$)이라고 하였으므로, $z'=z-1$ 은 음이 아닌 정수가 된다. 그런데 $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z) 가 $z \geq 1$ 을 만족한다면, $z=z'+1$ 로 치환을 하면 $x+y+z=x+y+(z'+1)=n$ 이 되어, $x+y+z'=n-1$ 을 만족하게 된다. 즉, $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z) 중에서 $z \geq 1$ 을 만족하는 것과 $x+y+z'=n-1$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z') 이 일대일 대응 관계를 가진다. 여기서 후자의 순서쌍 개수는 <제시문4>에 주어진 a_n 의 정의로부터 a_{n-1} 과 같다. 따라서 전자의 순서쌍 개수 역시 a_{n-1} 과 같다.

이제 $x+y+z=n$ 의 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x,y,z) 를 $z \geq 1$ 인 경우와 $z=0$ 인 경우로 나누자. 전자의 경우의 개수는 앞 문단에서 a_{n-1} 임을 보였다. 후자인 경우는 $(x,y)=(n,0),(n-1,1),\dots,(0,n)$ 이 되어 총 $n+1$ 개가 된다.

따라서, a_n 은 이 둘의 합이 되어 $a_n = a_{n-1} + (n+1)$ 이다.

채점기준 - 두 개의 서로 다른 상황 사이의 관계를 적절한 대응을 통해 해석할 수 있는지 여부를 평가한다. 그리고 문제에서

제기된 경우의 수를 일반적인 경우에 도출해 내기 위해 조합적인 사고를 논리적으로 해낼 수 있는지 여부를 평가한다.

[수학 1-iii]

예시답안 - <제시문3>에 주어진 이항정리에 $x=y=1$ 라는 값을 대입하면, 좌변은 $(x+y)^n = (1+1)^n = 2^n$ 이 되고, 좌변에 대입하면

$$\sum_{k=0}^n {}_nC_k X^{n-k} Y^k = \sum_{k=0}^n {}_nC_k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n {}_nC_k$$

이다. 그런데 <제시문1>과 <제시문2>에 정의된 이항계수 ${}_nC_k$ 는 모든 k 에 대해 ${}_nC_k \geq 1$

이므로 $\sum_{k=0}^n {}_nC_k \geq \sum_{k=0}^n 1 = n+1$ 이다.

좌변과 우변의 결과를 비교하면 $2^n \geq n+1$ (n 은 자연수)라고 결론내릴 수 있다.

채점기준 - <제시문>에 주어진 이항정리를 특수한 경우에 적용하여, 의미있는 항등식과 부등식을 도출해 내는 논리전개 과정을 평가한다.

[수학 1-iv]

예시답안 - 수학적 귀납법을 이용하기 위해 a_1 을 계산하면 $a_1 = 3 < 4 = 2^{1+1}$ 이므로 $n=1$ 일 때 문제에 주어진 부등식을 만족한다. $a_{n-1} \leq 2^n$ 이 성립한다고 가정하면, $a_n = a_{n-1} + (n+1) \leq 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ 이 성립하게 되어, 수학적 귀납법에 의해 주어진 부등식은 모든 자연수에 대해 항상 성립한다.

채점기준 - 자연수에 대해서 정의된 명제를 증명하기 위해 수학적 귀납법을 사용하여 논리전개하는 과정을 평가한다.

[2]

[수학 2-i]

예시답안 - <제시문3>에서 점 A 의 좌표는 $(1,0)$ 이고, <제시문2>에서 점 P_a 의 좌표는 (a, a^2) 이다. 선분 $\overline{AP_a}$ 를 이해하기 위해 두 점 $(1,0)$ 과 (a, a^2) 를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = \frac{a^2}{a-1}(x-1)$ 이다. 이 직선과 <제시문2>에 주어진 곡선 C 의 식 $y = x^2$ 을 연립하여

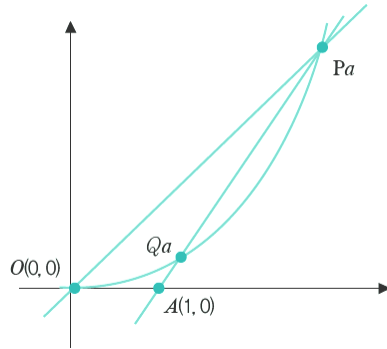
y 를 소거하면 $x^2 = \frac{a^2}{a-1}(x-1)$ 를 얻는다. 즉, $(a-1)x^2 - a^2x + a^2 = 0$ 이 성립한다.

이때 얻은 이차방정식의 해 x 를 구하면

$$x = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2(a-1)}}{2(a-1)} = \frac{a^2 \pm a(a-2)}{2(a-1)} = a \text{ 또는 } \frac{a}{a-1}$$

가 된다. 그런데 $x=a$ 일 때 점 P_a 이므로, 다른 점 Q_a 는

$Q_a = (\frac{a}{a-1}, (\frac{a}{a-1})^2)$ 으로 주어진다.



채점기준 - 주어진 점을 좌표로 표현하고, 이를 이용하여 직선의 방정식을 논리적으로 얻어내는지 여부를 평가한다. 또 직선과 곡선의 식을 연립방정식으로 표현하고, 그 해를 도출하는 논리전개 과정을 평가한다.

[수학 2-ii]

예시답안 - <제시문3>에서 점 O 의 좌표는 $(0,0)$ 이고, <제시문2>에서 점 P_a 의 좌표는 (a, a^2) 이므로 두 점 O 와 점 P_a 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax$ 이다. 따라서 <제시문1>에 정의된 영역의 넓이를 이용하기 위해 $p(x) = ax$ 와 $q(x) = x^2$ 이라 놓으면 x 가 0과 a 사이에서 <제시문1>의 조건 $p(x) \geq q(x)$ 를 만족한다. 따라서 적분공식을 이용하면

$$S_1(a) = \int_0^a [p(x) - q(x)] dx = \int_0^a [ax - x^2] dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{a^3}{6}$$

채점기준 - <제시문1>에 정의된 정적분과 영역의 넓이 사이 공식을 활용하여 넓이를 논리적으로 도출해 가는 과정을 평가한다.

[수학 2-iii]

예시답안 - [수학 2-i]로부터 Q_a 는 $(\frac{a}{a-1}, (\frac{a}{a-1})^2)$ 이고, <제시문2>로부터 점 P_a 는 (a, a^2) 이므로 선분 $\overline{Q_a P_a}$ 를 포함한 직선은 $y = p(x) = \frac{a^2}{a-1}(x-1)$ 이다. 곡선 C 는 $y = g(x) = x^2$ 으로 표현되므로

$$\begin{aligned} \text{<제시문1>에 의하여 } S_2(a) &= \int_{\frac{a}{a-1}}^a \left\{ \frac{a^2}{a-1}(x-1) - x^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{a^2}{a-1} \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{a}{a-1}}^a \\ &= \left(\frac{a}{a-1} \right)^3 \left\{ \frac{1}{6}(a-2)^3 \right\} \end{aligned}$$

이다. 문제에 제시된 조건 $S_2(a) = (\frac{a}{a-1})^3 \times g(a)$ 로부터 $g(a) = \frac{1}{6}(a-2)^3$ 이다.

채점기준 - <제시문1>의 정적분을 활용하여 넓이의 값을 논리적으로 도출해 낼 수 있는지 그 과정을 평가한다. 또 다항식을 논리적으로 변형하여 간단한 형태로 표현해 낼 수 있는지 여부를 평가한다.

[수학 2-iv]

예시답안 -

문제 [수학 2-ii]에서 $S_1(a) = \frac{1}{6}a^3$ 이었고, 문제 [수학2-iii]에서 $S_2(a) = \frac{1}{6}(\frac{a}{a-1})^3(a-2)^2$ 를 얻었다.

이 두식의 비를 쓰고 a 를 무한대로 보내면 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2(a)}{S_1(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}(\frac{a}{a-1})^3(a-2)^2}{\frac{1}{6}a^3}$ 로 쓰여진

다. 그런데 $S_1(a)$ 과 $S_2(a)$ 의 최고차항은 모두 삼차항 (a^3)이고, 그 계수는 모두 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_2(a)}{S_1(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{6}a^3} = 1 \text{이다.}$$

채점기준 - 극한값의 개념을 잘 이해하여 유리함수의 비의 극한값을 논리적으로 도출해 내는 과정을 평가한다.

[3]

[수학 1-i]

B 의 반지름을 r 이라고 하면, $\pi r^2 = 1$ 이 되어, $r = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 이다.

따라서 $B+B$ 는 중심이 원점이고, 반지름이 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ 인 원이 되고, 따라서 넓이는 $\pi(\frac{2}{\sqrt{\pi}})^2 = 4$ 가 된다.

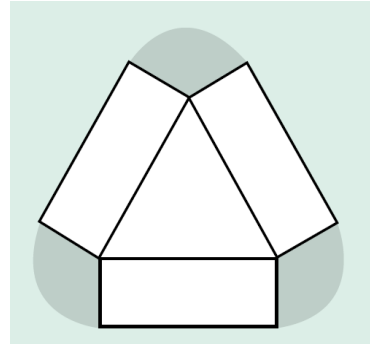
[수학 1-ii]

우선 S_3 의 면적은 오른쪽의 그림과 같이 A_3 의 면적인 1과 그 둘레의 면적의 합과 같다. 이 중 빗금 친 부분의 면적은 원 B 의 면적 1과 같다. 나머지 부분의 면적은 $(A_3 \text{의 둘레의 길이}) \times (B \text{의 반지름})$ 과 같고 이는 $(\frac{6}{\sqrt{3}}) \times (\frac{1}{\sqrt{\pi}})$ 와 같다. 따라서

$$S_3 = 2 + \frac{6}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{3}} \text{이다.}$$

[수학 1-iii]

A_4 의 둘레의 길이는 4이므로 [수학 1-ii]에서와 같이 $S_4 = 2 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}$ 이다. 이때 $\frac{(6/\sqrt[4]{3})}{(4/1)} = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} > 1$ 이다. (양변에 4제곱을 취하면 $3 < (\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$ 이다.) 따라서 $S_4 < S_3$ 이다.



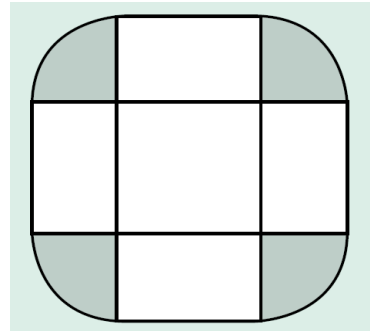
[수학 1-iv]

A_n 의 한 변의 길이를 L 이라고 하면, $1 = (A_n \text{의 면적}) = n(\frac{L}{2})(\frac{L/2}{\tan(\pi/n)}) = \frac{L^2}{4} \times \frac{n}{\tan(\pi/n)}$ 이

다. 따라서 $L = 2\sqrt{\frac{1}{n} \times \tan(\frac{\pi}{n})}$ 이다. 따라서

$$S_n = 2 + \frac{n}{\sqrt{\pi}} \times 2\sqrt{\frac{1}{n} \tan(\frac{\pi}{n})} = 2 + 2\sqrt{\frac{n}{\pi} \tan(\frac{\pi}{n})} \text{이다.}$$

<제시문 4>에서 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ 는 증가하므로, $f(\frac{\pi}{n}) = \frac{n}{\pi} \tan(\frac{\pi}{n})$ 은 n 이 증가하면 감소한다. 따라서 수열은 $S_3 > S_4 > S_5 > \dots$ 로 감소한다. $n \rightarrow \infty$ 일 때, 정 n 각형 A_n 은 원 B 로 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = B + B \text{의 넓이} = 4$ 가 된다. 그런데 S_n 은 감소하므로, $S_n > \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 4$ 가 성립한다.



[4]

[수학 2-i]

<제시문 4>의 정의에 의해

$$\left| \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \right| = \left| \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} \right| = \left| h \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h|$$

따라서 양변에 극한을 취하면

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0.$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

[수학 2-ii]

<제시문 2>와 [수학 2-i]을 이용하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = g'(0)(x-0) + g(0) = 0(x-0) + 0 = 0.$$

따라서 접선의 방정식은 $y=0$ 이 된다.

[수학 2-iii]

(i) $x=0$ 일 때

$g(0)=0$ 이므로 $(0,0)$ 은 두 함수의 교점이다.

(ii) $x \neq 0$ 일 때

문제 [수학 2-ii]의 접선의 방정식과 <제시문 4>의 $g(x)$ 를 연립하면,

$$x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

이를 만족하는 $x(\neq 0)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{1}{x} = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

따라서 교점은 $(\pm \frac{1}{\pi}, 0), (\pm \frac{1}{2\pi}, 0), (\pm \frac{1}{3\pi}, 0), \dots$.

(i), (ii)에 의해 교점이 무수히 많음을 알 수 있다.

[수학 2-iv]

$T(x)$ 의 양변을 미분하면 $T'(x) = f'(x) - f(a)$.

$f(x)$ 가 아래로 볼록한 함수이므로, 양변을 다시 한 번 미분하면, $T''(x) = f''(x) > 0$.

즉 $T'(x)$ 는 증가함수이다. 그런데 $T'(a) = 0$ 이므로 $x > a$ 일 때 $T'(x) > 0$ 이고, $x < a$ 일 때 $T'(x) < 0$ 임을 알 수 있다.

따라서 $T(x)$ 는 $x=a$ 에서 유일한 최솟값을 가지고 $T(a)=0$ 이 된다.

그런데 정의에 의해서 $T(a)=0$ 은 $(a, f(a))$ 가 함수 $f(x)$ 와 접선 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ 의 교점임을 의미하므로, 이 점이 유일한 교점임을 알 수 있다.

[5]

[수학 1-i]

대각선의 길이가 $2a$ 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}a$ 이므로 정사각형 $AGDH$ 의 넓이는 $2a^2$ 이다. 또한 삼각형 BGC 의 넓이는 x^2 이다. 따라서 육각형 $ABCDEF$ 의 넓이 $S(x)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$S(x) = 2a^2 - 2x^2 = 2(a^2 - x^2)$$

○채점기준

(2점) 정사각형 $AGDH$ 의 넓이 $2a^2$ 를 구할 수 있다.

(1점) 삼각형 BGC 의 넓이 x^2 을 구할 수 있다.

(2점) 육각형 $ABCDEF$ 의 넓이 $S(x) = 2(a^2 - x^2)$ 를 구할 수 있다.

(2점) 답안의 논리적 작성.

※ 육각형 $ABCDEF$ 의 넓이 $S(x)$ 를 직접 계산할 수 있지만 식이 복잡해지므로 적절한 감점 부여.

[수학 1-ii]

정사각형 $AGDH$ 의 넓이가 삼등분되기 위해서는 삼각형 BGC 의 넓이가 정사각형 $AGDH$ 의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이 되어야 한다. 따라서

$$\frac{2a^2}{3} = x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

○채점기준

(2점) 정사각형 $AGDH$ 의 넓이가 삼등분되기 위해서는 삼각형 BGC 의 넓이가 정사각형 $AGDH$ 의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이 되어야 한다.

(3점) $x = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ 를 구할 수 있다.

※ 육각형 $ABCDEF$ 의 넓이 $S(x)$ 로 계산할 수 있지만 식이 복잡해지므로 1점 감점부여

(2점) 답안의 논리적 작성.

[수학 1-iii]

대각선의 길이가 $2a$ 이므로 $l(x) = 2a - 2x$. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{s(x)}{l(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(a^2 - x^2)}{2(a - x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(a - x)(a + x)}{2(a - x)} = \lim_{x \rightarrow a} (a + x) = 2a$$

○채점기준

(1점) $l(x) = 2a - 2x$ 를 구할 수 있다.

(3점) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{s(x)}{l(x)}$ 을 구할 수 있다.

(2점) 답안의 논리적 작성.

[6] [학교발표해설]

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ 이므로 $y' = x$ 이다. 따라서 <제시문1>에 의하여 접선 l 의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}a^2 = a(x - a) \Rightarrow y = ax - \frac{1}{2}a^2$$

(2) 두 직선 l 과 l' 은 서로 수직이므로 <제시문2>에 의하여 직선 l' 의 기울기는 $-\frac{1}{a}$ 이

다. 직선 l' 이 점 $P(a, \frac{1}{2}a^2)$ 를 지나므로 직선 l' 의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{a}(x - a) \Rightarrow y = -\frac{1}{a}x + 1 + \frac{1}{2}a^2.$$

따라서 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 직선 l' 의 교점은

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= -\frac{1}{a}x + 1 + \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{2}{a}x - a^2 - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (x - a)\left(x + \left(a + \frac{2}{a}\right)\right) = 0 \quad (P\left(a, \frac{1}{2}a^2\right) \text{는 하나의 교점}) \\ &\Rightarrow Q \text{의 좌표는 } \left(-\left(a + \frac{2}{a}\right), \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)^2\right). \end{aligned}$$

$$(3) S_1 \text{의 넓이} = \int_{-\left(a + \frac{2}{a}\right)}^0 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}\left(a + \frac{2}{a}\right)^3.$$

$$S_2 \text{의 넓이} = \int_0^a \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}a^3.$$

$$(4) S_1 \text{과 } S_2 \text{의 넓이는 같다.} \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 = \frac{1}{6}a^3$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{2}{a}\right)^3 = a^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a} = 0$$

이는 모순이다. 따라서 모든 $a > 0$ 에 대하여 S_1 과 S_2 의 넓이는 같지 않다.

<별해>

포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 은 y 축에 대칭이므로

$$S_1 \text{과 } S_2 \text{의 넓이는 같다.} \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a} = 0$$

이는 모순이다. 따라서 모든 $a > 0$ 에 대하여 S_1 과 S_2 의 넓이는 같지 않다.

[학교발표 채점기준] 20점

(1) 3점

(1점) $y' = x$.

(1점) 접선의 방정식 $y = ax - \frac{1}{2}a^2$ 를 구할 수 있다.

(1점) 답안의 논리적 작성.

(2) 7점

(2점) l' 의 방정식은 $y = -\frac{1}{a}x + 1 + \frac{1}{2}a^2$ 을 구할 수 있다.

(1점) 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 직선 l' 의 교점은 $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{a}x + 1 + \frac{1}{2}a^2$ 을 만족하는 점이다.

(3점) Q 의 좌표 $\left(-\left(a + \frac{2}{a}\right), \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)^2\right)$ 를 구할 수 있다.

(1점) 답안의 논리적 작성.

(3) 4점

(2점) 정적분을 이용하여 S_1 의 넓이 $\frac{1}{6}\left(a + \frac{2}{a}\right)^3$ 를 구할 수 있다.

(2점) 정적분을 이용하여 S_2 의 넓이 $\frac{1}{6}a^3$ 를 구할 수 있다.

(4) 6점

(2점) S_1 과 S_2 의 넓이는 같다. $\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 = \frac{1}{6}a^3$

(2점) S_1 과 S_2 의 넓이는 같다. $\Leftrightarrow \frac{2}{a} = 0$ 이는 모순

(2점) 답안의 논리적 작성.

[7]

[수학 1-i]

[예시답안]

<제시문3>에 의해 세 점 P_1, P_2, P_3 을 지나는 평면의 방정식은 $x + y + z = t$ 이다. <제시문 1>의 점과 평면 사이의 거리 공식에 점 $Q(1, 1, 1)$ 와 평면 $x + y + z = t$ 를 적용하면, 구하고자 하는 거리는 $\frac{|3-t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{t}{\sqrt{3}}$ 이다.

[채점기준]

평면에 있는 세 점의 좌표로부터 평면의 방정식을 도출할 수 있다.

한 점의 좌표와 평면의 방정식이 주어졌을 때, 점과 평면 사이의 거리를 도출할 수 있다.

[수학 1-ii]

[예시답안]

한 변의 길이가 양의 실수 a 인 정삼각형의 내접원의 반지름은 $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ 이다.

<제시문3>에 의해 삼각형 $P_1P_2P_3$ 은 한 변의 길이가 $a = \sqrt{2}t$ 인 정삼각형이므로, 내접원의 반지름은 $\frac{\sqrt{2}t}{2\sqrt{3}}$ 이고 이를 간단히 표현하면 $\frac{t}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}t}{6}$ 이다.

[채점기준]

좌표공간에서 정의된 이차곡선에 대한 기하적인 양을 매개변수에 대한 함수로 표현할 수 있다.

[수학 1-iii]

[예시답안]

원뿔 V_t 의 밑면의 반지름은 $\frac{t}{\sqrt{6}}$ 이고 높이는 $\sqrt{3} - \frac{t}{\sqrt{3}}$ 이므로,

<제시문2>에 의해 원뿔 V_t 의 부피는 $\frac{\pi}{3} \left(\frac{t}{\sqrt{6}} \right)^2 \left(\sqrt{3} - \frac{t}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{18\sqrt{3}} 3t(2-t)$ 이다.

$f'(t) = 0$ 의 해는 열린 구간 $(0, 3)$ 에서 유일한 해 $t = 2$ 를 가진다.

$f''(2) < 0$ 이므로, $f(t)$ 는 $t = 2$ 에서 최댓값을 가진다.

$t = 2$ 를 V_t 에 대입하면, V_2 의 값은 $\frac{\pi}{18\sqrt{3}} 2^2(3-2) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ 이다.

[채점기준]

원뿔의 부피를 매개변수에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

함수의 극값을 미분을 통하여 찾을 수 있다.

이계도함수를 이용하여 함수의 극댓값을 찾을 수 있다.

[8]

[수학 2-i]

[예시답안]

(가) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(x+1)^2}{2} \right\} \times \ln(x+1)dx$ 이므로 <제시문2>를 적용하면

$\int_0^1 f(x)dx = \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{2} \frac{1}{x+1} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$ 을 얻는다.

(나) $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) = \ln(x+1) + 1 > 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 f 는 증가한다. 따라서 $x = 1$ 에서 최댓값을 가지고 그 값은 $f(1) = 2\ln 2$ 이다.

한편, $f(1) - f(0) = 2\ln 2$ 이므로, (가)의 결과에 의해 $e^{\frac{3}{8}} \leq 2$, 즉 $e^3 \leq 2^8$ 이 된다. 그런데 <제시문4>에 의해 $e^3 < 3^3 = 27 < 256 = 2^8$ 이므로 문제의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

[채점기준]

(가) 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있다.

(나) 미분을 이용하여 함수의 증감을 알아내고 이를 이용하여 최댓값을 구할 수 있다. 지수와 로그함수의 성질을 이용하여 실수의 대소관계를 보일 수 있다.

[수학 2-ii]

[예시답안]

g 가 주어진 구간에서 증가하므로 <제시문1>에 의해 $g(0) \leq g(x)$ 가 성립한다. 양변을 적분하면

$$g(0) = \int_0^1 g(0)dx \leq \int_0^1 g(x)dx$$

$$\text{따라서 } g(x) \leq g(1) \leq g(1) + \left\{ \int_0^1 g(x)dx - g(0) \right\} \leq g(1) - g(0) + \int_0^1 g(x)dx.$$

[채점기준]

증가하는 함수의 성질을 이용하여 함수값이 취할 수 있는 범위의 한계를 평균값과 증가폭을 이용하여 나타낼 수 있다.

[수학 2-iii]

[예시답안]

$h(x)$ 의 최댓값은 $h(\frac{7}{8}) = -\sin \frac{3\pi}{2} = 1$ 이다.(삼각함수는 1보다 클 수 없으므로)

한편 h 의 증가폭은 $h(1) - h(0) = -\sin \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 이고,

$T = \frac{\pi}{3}(4x+1)$ 로 놓으면 $dT = \frac{4\pi}{3}dx$ 이므로 치환적분법에 의해 $h(x)$ 의 평균값은

$$\int_0^1 -\sin\left(\frac{\pi}{3}(4x+1)\right)dx = -\frac{3}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin T dT = \frac{3}{4\pi} (\cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}) = 0$$

가 된다. 따라서 $h(x) \leq 1 \leq \sqrt{3} = h(1) - h(0) + \int_0^1 h(x)dx$ 임을 알 수 있다.

[채점기준]

삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값과 증가폭을 구할 수 있다.

치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있다.

[9]

[수학 1-i]

[예시답안]

P 의 좌표를 $P(x_1, y_1)$ 이라 두자. P 는 타원 $E_{2,1}$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \quad (1)$$

이고, 사각형 $OCPD$ 의 넓이는 $x_1 y_1$ 이다. 산술기하평균과 (1)에 의해

$$x_1 y_1 = 2 \left(\frac{x_1}{2} \times y_1 \right) \leq \frac{2}{2} \left(\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 \right) = 1$$

등호는 $\frac{x_1}{2} = y_1$ 일 때 성립하고 (1)과 연립하면 $x_1 = \sqrt{2}, y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 을 얻는다.

즉 $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이고, 이때 넓이는 $V=1$ 이다.

[채점기준]

산술기하평균 혹은 미분을 이용하여 넓이가 최대가 되는 경우를 구할 수 있다.

[수학 1-ii]

[예시답안]

P 의 좌표를 $P(x_1, y_1)$ 이라 두자. P 는 타원 $E_{\sqrt{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}}$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{x_1^2}{3} + \frac{2}{3} y_1^2 = 1 \quad (1)$$

회전체의 부피는 $V = \pi y_1^2 x_1$ 이고, (1)을 대입하면 $V = \frac{3\pi}{2} x_1 \left(1 - \frac{x_1^2}{3}\right)$ 를 얻는다.

따라서 $\frac{dV}{dx_1} = \frac{3\pi}{2} (1 - x_1^2) = \frac{3\pi}{2} (1 - x_1)(1 + x_1)$ 이고, $x_1 = 1$ 에서 최댓값을 가진다. (1)로부터

터 $y_1 = 1$, 즉 $P(1, 1)$ 임을 알 수 있고 이때의 부피는 $V = \pi$ 이다.

[채점기준]

미분을 이용하여 부피가 최대가 되는 경우를 구할 수 있다.

[수학 1-iii]

[예시답안]

P 의 좌표를 $P(x_1, y_1)$ 이라 두자. 그러면 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발은 각각 $C = (x_1, 0), D = (0, y_1)$ 이다. --- (1)

접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ 로 주어진다.

따라서 x 축, y 축과의 교점은 각각 $A = \left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right), B = \left(0, \frac{b^2}{y_1}\right)$ 이다. --- (2)

(1), (2)로부터 $\overline{OA} \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \overline{OD} = \frac{a^2}{x_1} \times \frac{b^2}{y_1} \times x_1 \times y_1 = a^2 b^2$ 가 되어 P 의 위치에 관계없이, (즉, x_1, y_1 의 값에 관계없이) a, b 에 의해 결정됨을 알 수 있다.

[채점기준]

타원의 접선의 방정식을 이용하여 특정한 기하적인 양이 일정함을 보일 수 있다.

[10]

[문제 1-i]

[예시답안]

포물선의 방정식이 $y = f(x) = x^2$ 로 주어졌으므로, $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$ 이다. 이때 접선 L_0 의 접점의 좌표는 (a_1, a_1^2) 이므로 직선의 방정식은 <제시문 1>에 의하여 $y - a_1^2 = 2a_1(x - a_1)$ 이다.

이 직선이 점 $(a_0, 0) = (1, 0)$ 을 지나므로, 식 $-a_1^2 = 2a_1(1 - a_1)$ 을 얻게 된다.

이를 정리하면 $a_1^2 - 2a_1 = a_1(a_1 - 2) = 0$ 을 얻게 된다. 이때 <제시문 2>에 의해 a_1 은 0이 아니므로, $a_1 = 2$ 이다.

따라서 접선 L_0 의 방정식은 기울기가 4이므로, L_0 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 L_0 에 수직이며 접점을 지나는 직선의 방정식은 $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$ 이다.

이 방정식과 $y = x^2$ 을 연립하면, $(x - 2)(4x + 9) = 0$ 이 되므로 접점이 아닌 교점의 x 좌표는 $b_1 = -\frac{9}{4}$ 이다.

[채점기준]

(3점) 접선 L_0 의 방정식으로부터 $a_1 = 2$ 의 값을 구할 수 있다.

(2점) 접선 L_0 에 수직이며 접점을 지나는 직선의 방정식 $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$ 을 구할 수 있다.

(2점) $b_1 = -\frac{9}{4}$ 의 값을 구할 수 있다.

[문제 1-ii]

[예시답안]

일반적으로 접선 L_n 의 방정식은 $y - a_{n+1}^2 = 2a_{n+1}(x - a_{n+1})$ 이고, 점 $(a_n, 0)$ 을 지나므로 $-a_{n+1}^2 = 2a_{n+1}(a_n - a_{n+1})$ 을 만족한다. a_{n+1} 은 0이 아닌 실수이므로 $-a_{n+1} = 2(a_n - a_{n+1})$ 이 성립하고, 이를 정리하면 $a_{n+1} = 2a_n$ 이다.

즉, 실수열 $\{a_n\}$ 은 초기항 $a_0 = 1$ 이고 공비가 2인 등비수열이므로, 일반항은 $a_n = 2^n$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ 이다.

[채점기준]

(3점) 접선 L_n 의 방정식으로부터 실수열 $\{a_n\}$ 이 초기항 $a_0 = 1$ 이고 공비가 2인 등비수열임을 추론할 수 있다.

(3점) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 1$ 을 계산할 수 있다.

[문제 1-iii]

[예시답안]

일반적으로 접선 L_n 에 수직이고 접점을 지나는 직선의 방정식은,

$$y - a_{n+1}^2 = -\frac{1}{2a_{n+1}}(x - a_{n+1}) \text{이다.}$$

이 직선이 포물선 $y = x^2$ 과 만나는 점의 x 좌표 b_{n+1} 은 방정식

$$b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -\frac{1}{2a_{n+1}}(b_{n+1} - a_{n+1}) \text{을 만족한다.}$$

$$b_{n+1} \neq a_{n+1} \text{이므로 } b_{n+1} + a_{n+1} = -\frac{1}{2a_{n+1}} \text{을 만족한다.}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2a_n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2} \text{이다.}$$

[채점기준]

(3점) 접선 L_n 에 수직이고 접점을 지나는 직선의 방정식 $y - a_{n+1}^2 = -\frac{1}{2a_{n+1}}(x - a_{n+1})$ 을 유도할 수 있다.

(2점) a_{n+1} 과 b_{n+1} 의 관계인 $b_{n+1} + a_{n+1} = -\frac{1}{2a_{n+1}}$ 을 유도할 수 있다.

(2점) 합 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2}$ 을 구할 수 있다.

[11]

<예시답안 및 채점기준>

[문제 2-i]

[예시답안]

문제의 적분 $\int_0^{2016} f(x) dx$ 은 적분의 성질로부터 다음과 같다.

$$\sum_{n=0}^{1007} \int_{2n}^{2n+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \cdots + \int_{2014}^{2016} f(x) dx$$

치환 $x = z + 2n$ 으로부터 $\int_{2n}^{2n+2} f(x) dx = \int_0^2 f(z + 2n) dz$ 를 얻게 되고, <제시문 1>에 의

해 이는 다시 $\int_0^2 f(z) dz = 1$ 과 같게 된다. 따라서 문제의 적분은 $\sum_{n=0}^{1007} 1 = 1008$ 이다.

[채점기준]

(2점) 정적분의 성질을 이용하여 $\int_0^{2016} f(x) dx = \sum_{n=0}^{1007} \int_{2n}^{2n+2} f(x) dx$ 임을 유도할 수 있다.

(3점) <제시문 1>을 이용하여 문제의 적분값이 $\sum_{n=0}^{1007} \int_0^2 f(x) dx$ 임을 유도할 수 있다.

(1점) $\int_0^2 f(z) dz = 1$ 임을 관찰하여, 문제의 적분값이 1008임을 유도할 수 있다.

[문제 2-ii]

[예시답안]

<제시문 2>로부터 양의 정수 n 에 대하여 다음을 알 수 있다.

$$g(a) = \begin{cases} 1 & , \quad a > \frac{1}{2} \\ 2n+1 & , \quad \frac{1}{2n+2} < a < \frac{1}{2n} \\ 2n & , \quad a = \frac{1}{2n} \end{cases}$$

따라서 $g\left(\frac{1}{n}\right) = n$ 임을 알 수 있고, 문제의 합은 $\sum_{n=1}^{100} g\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{100} n = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$ 이다.

[채점기준]

(5점) 양의 정수 n 에 대하여 $g\left(\frac{1}{n}\right) = n$ 임을 추론할 수 있다.

(1점) 등차수열의 합 $\sum_{n=1}^{100} n = 5050$ 을 구할 수 있다.

[문제 2-iii]

[예시답안]

양의 정수 n 에 대하여, $\frac{1}{2n+2} < a < \frac{1}{2n}$ 일 때, $g(a) = 2n+1$ 이므로, $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$ 에
서 $h(x) = (2n+1) \times \sin(x)$ 이다.

마찬가지로 방식으로, $h(n\pi) = 0$ 이고, $x \in (0, \pi)$ 일 때 $h(x) = \sin(x)$ 이을 알 수 있다.

이를 종합하면, 양의 정수 n 에 대하여, $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ 에서 $h(x) = (2n+1) \times \sin(x)$ 임
을 알 수 있다. 문제의 적분 $\int_{\pi}^{51\pi} |h(x)| dx$ 는 정적분의 성질로부터

$\int_{\pi}^{2\pi} |h(x)| dx + \dots + \int_{50\pi}^{51\pi} |h(x)| dx$ 와 같음을 알 수 있고, 이는 함수 $y = h(x)$ 의 정의로부터

$$3 \times \int_{\pi}^{2\pi} |\sin(x)| dx + \dots + 101 \times \int_{50\pi}^{51\pi} |\sin(x)| dx \text{과 같다.}$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = 2 \text{이므로, 문제의 적분값은}$$

$$(3 + 5 + \dots + 101) \times 2 = 5200 \text{이다.}$$

[채점기준]

(2점) $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$ 에서 $h(x) = (2n+1) \times \sin(x)$ 임을 구할 수 있다

(3점) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)| dx = 2$ 임을 유도할 수 있다.

(3점) $\int_{\pi}^{51\pi} |h(x)| dx = 5200$ 임을 구할 수 있다.

[12]

(1) $S_1(t)$, $S_2(t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$S_1(t) = \frac{1}{2} CF \times FE = \frac{t^2}{2},$$

$$S_2(t) = \frac{1}{2} HG \times GA = \frac{1}{2} \{2 - (t+1)\}^2 = \frac{1}{2} (t-1)^2.$$

$$\text{따라서 } g(t) = \frac{1}{4} t^2 (t-1)^2 \text{이다.}$$

(2) $g(t)$ 이를 미분하면

$$g'(t) = t(t-1/2)(t-1).$$

이다. 증감을 조사하면

	0		1/2		1
$g'(t)$	0	+	0	-	0
$g(t)$	0	증가	1/64	감소	0

$t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값을 가짐을 알 수 있고, 이때 최댓값은 $f(1/2) = 1/64$ 이다.

[13] 집합 A 는 $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{a}$ 를 만족하는 점들의 집합이다. 이를 정리하면 타원

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a-4} = 1 \quad \text{----- (1)}$$

의 그래프를 얻는다. 집합 B 는

$$\left| \sqrt{(x + \sqrt{a})^2 + y^2} - \sqrt{(x - \sqrt{a})^2 + y^2} \right| = 4$$

를 만족하는 점들의 집합이다. 이를 정리하면 쌍곡선

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{a-4} = 1 \quad \text{----- (2)}$$

을 얻는다.

두 식 (1)과 (2)를 더하면 $x^2 = \frac{8a}{a+4}$ 를 얻고, 이를 다시 (1),(2) 중 하나에 대입하면

$$y^2 = \frac{(a-4)^2}{a+4} \text{를 얻는다.}$$

이 값을 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면 $\frac{a^2+16}{a+4} = 5$, 즉 $a^2 - 5a - 4 = 0$ 를 얻는다.

이 방정식의 해는 $a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$ 이고 이 중 문제의 조건에 부합하는 해는

$$a = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \text{이다.}$$

[14]

(1) $\alpha = 1$ 일 때, 입체도형 S_1 은 삼각형 OAB 를 밑면으로 하고 높이가 1인 삼각뿔이므로, 이 도형의 부피는 $\frac{1}{6}$ 이다.

(2) 삼각기둥 $OADCBE$ 의 부피는 $\frac{1}{2}$ 이므로, S_1 의 부피는 그 절반인 $\frac{1}{4}$ 이다.

직사각형 $PQRS$ 의 밑변의 길이는 x^α 이고 높이는 $1-x$ 이므로, 넓이는 $x^\alpha(1-x)$ 이다. 따라서 입체도형 S_1 의 부피는 $\int_0^1 x^\alpha(1-x)dx$ 이다. 이 식에 [제시문 2]를 적용하면, 입체도형

S_1 의 부피는 $\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$ 가 된다. 이 식의 값이 $\frac{1}{4}$ 이므로, 방정식

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} = \frac{1}{4}, \text{ 즉 } \alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \text{을 얻게 된다. 따라서 } \alpha = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{이다.}$$

[15]

(1) 선분 OP_1 의 길이는 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$

이므로, 점 P_1 의 좌표는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

(2) 각 $\angle P_{n-1}OP_n$ 의 크기는 $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 이므로 각 $\angle P_0OP_n$ 의 크기는

$\pi\left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}}$ 이다. 따라서 선분 OP_n 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 이다.

또한 $\overline{OP_n} = \overline{OP_{n-1}} \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 로부터 $\overline{OP_n}$ 의 값은 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 임을 얻는다. 이를 이용하여, 점 P_n 의 y 좌표인 y_n 의 값은 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 이 된다. 이 식에 삼각함수의 배각공식을 적용하면, $y_n = \frac{1}{2^n}$ 임을 얻게 된다. 따라서 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ 이다.

(3) (2)로부터 x_n 의 값은 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 이다. 양변에 $\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 를 곱하면, $x_n \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 이 된다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{\pi} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/2^{n+1}}{\sin(\pi/2^{n+1})} \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ 이 된다.

[제시문 2]를 이용하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{\pi}$ 을 얻는다.

[16]

문제 1

개요 및 주요 평가항목

본 문제는 수학 I의 “등차수열”과 수학 II의 “함수의 극한과 연속”단원에서 출제되었다. 수열은 비연속적으로 발생하는 자연현상을 분석하는데 매우 중요한 개념으로, 본 문제는 좌표평면 위의 특정한 영역 내에 포함되어 있는 격자점의 개수로 주어지는 수열을 수식화 하고, 이와 관련한 극한값을 올바르게 도출할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 문제의 답은 도형의 면적 혹은 정적분의 사용을 통해 쉽게 예상가능하나, 이를 수학적으로 엄밀히 유도할 수 있는지에 주안점을 두었다. 문제는 평이하며, 고등학교 교과과정에서 다루어지는 기본적인 개념에 대한 이해가 충분하다면 쉽게 설명할 수 있는 문제이다.

[수학 1-i] 문제에 제시된 상황을, 가장 단순한 경우를 통하여 올바르게 접근할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[수학 1-ii] 특정한 집합의 원소의 개수를, 여집합의 원소의 개수를 통하여 유도하고, 그 값을 등차수열의 합을 통하여 수식화 할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[수학 1-iii] 도형의 면적으로부터 추론 가능한 비율을, 다항식의 비의 극한값을 통하여

엄밀하게 유도할 수 있는지를 평가하고자 한다.

예시답안 및 채점기준

[수학 1-i]

예시답안

$n=3$ 일 때, 집합 P_3 은 0이상이고 3이하인 정수의 쌍 (x, y) 의 개수이므로, 총 $4^2 = 16$ 개의 원소를 가진다. 집합 $P_3 - S_3$ 의 원소 중, $y \leq x$ 인 점은 $(1, 0), (2, 0), (3, 0)$ 으로 대칭성에 의해 집합 $P_3 - S_3$ 의 원소의 개수는 6이다. 따라서, 집합 S_3 는 10개의 원소를 가진다.

채점기준

(3점) 집합 P_3 의 원소의 개수를 올바르게 유도할 수 있다.

(3점) 집합 S_3 의 원소의 개수를 올바르게 유도할 수 있다.

[수학 1-ii]

예시답안

자연수 n 이 3의 배수이므로, $n=3k$ 라고 두자. $P_n - S_n$ 의 원소 중, $y \leq x$ 인 점은 $(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (4, 1), \dots, (3k, k-1)$

으로 총 개수는 $(1+1+1)+(2+2+2)+\dots+(k+k+k)$ 이고 이는 <제시문 1>에 의하여 $\frac{3}{2}k(k+1)$ 과 같다.

$k = \frac{n}{3}$ 이므로, 이는 $\frac{n(n+3)}{6}$ 과 같다.

따라서 집합 $P_n - S_n$ 의 원소의 개수는 $(n+1)^2 - \frac{n(n+3)}{3} = \frac{2}{3}n^2 + n + 1$ 이다.

채점기준

(5점) 집합 S_n 의 원소의 개수를 올바르게 유도할 수 있다.

(5점) 유도한 식을 n 에 대한 식으로 표현할 수 있다.

[수학 1-iii]

예시답안

자연수 n 이 $3k \leq n \leq 3k+2$ 일 때, S_n 의 원소의 개수는 S_{3k} 이상이고, S_{3k+3} 보다 작다.

S_{3k} 의 원소의 개수는 $\frac{2}{3}(3k)^2 + 3k + 1$ 이고, $k > \frac{n-3}{3}$ 이므로,

$\frac{2}{3}(n-3)^2 + n - 3 + 1 = \frac{2}{3}n^2 - 3n + 4$ 보다 크다.

S_{3k+3} 의 원소의 개수는 $\frac{2}{3}(3k+3)^2 + (3k+3) + 1$ 이고, $k \leq \frac{n}{3}$ 이므로,

$$\frac{2}{3}(n+3)^2 + n + 3 + 1 = \frac{2}{3}n^2 + 5n + 10 \text{ 보다 작거나 같다.}$$

이 두 식을 모두 P_n 의 원소의 개수인 $(n+1)^2$ 로 나눈 값의 n 이 무한대로 갈 때의 극한값은 $\frac{2}{3}$ 이므로, 문제에서 구하고자 하는 극한값 역시 $\frac{2}{3}$ 이다.

채점기준

(3점) 비에 대한 식을 유도할 수 있다.

(3점) <제시문 3>을 이용하여 극한값을 도출할 수 있다.

[17]

문제 2

개요 및 주요 평가항목

적분은 미분과 함께 다양한 물리적 현상과 사물의 움직임을 분석하고 예측할 뿐 아니라, 수리적 양을 계산하는데 있어서 아주 강력한 수학적 도구이다. 이를 이용하여 우리는 여러 기하적인 대상의 길이, 면적 그리고 부피를 구할 수 있다. 이러한 취지에서 이 문제는, 고등학교 수학 교과 중 삼각함수와 정적분 부분에서 출제되었다.

주어진 조건으로부터 좌표공간에 놓여있는 입체도형의 부피를 정적분을 활용하여 도출하는데 있어서, 삼각함수의 정의와 성질을 적절히 이용할 수 있는지와 삼각함수와 관련한 극한값을 도출하여, 입체도형의 부피의 극한값을 계산할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 문제의 답은 직관적으로 쉽게 예상가능하나, 수학적으로 엄밀한 추론과정의 평가에 더 주안점을 두었으며, 고등학교 교과과정에서 다루지는 기본적인 개념에 대한 이해가 충분하다면 쉽게 설명할 수 있는 문제이다.

[수학 2-i] 삼각함수의 정의와 성질을 이용하여, 기하적인 양을 수식으로 올바르게 유도할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[수학 2-ii] 입체도형의 부피를 단면적의 정적분으로 표현하는 정리를 활용하여, 구의 단면적과 일정한 비율의 단면적을 가지는 입체도형의 부피를 올바르게 유도할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[수학 2-iii] 삼각함수와 관련한 극한값을 활용하여, 직관적으로 유도가능한 사실을 수학적으로 엄밀히 보일 수 있는지를 평가하고자 한다.

예시답안 및 채점기준

[수학 2-i]

예시답안

정 n 각형의 꼭짓점을 순서대로 $P_1, \dots, P_n$ 이라고 하고, 그 중심을 O 라고 하면, 이등변삼각

형 P_iOP_{i+1} 의 꼭지각은 $\frac{2\pi}{n}$ 이 된다. 이로부터 이 삼각형의 밑변의 길이는 $2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 이고 높이는 $r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 이다. 따라서 그 넓이는 $r^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{r^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 이 된다. 그리하여 정 n 각형의 넓이는 $\frac{nr^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 이다.

채점기준

(3점) 정 n 각형을 이등변삼각형으로 쪼개어, 각 변의 길이를 유도할 수 있다.

(3점) 정 n 각형의 넓이를 식으로 올바르게 표현할 수 있다.

[수학 2-ii]

예시답안

원과 내접하는 정 n 각형의 넓이의 비는 $\frac{nr^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)/2}{\pi r^2}=\frac{n}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 이다.

입체도형 V_n 을 닫힌구간 $[-1, 1]$ 위의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하고, 구 A 의 단면의 넓이를 $T(x)$ 라고 하자. <제시문 2>에 의하여 V_n 의 부피는 $\int_{-1}^1 S(x)dx$ 이고, 이는 $\int_{-1}^1 \frac{n}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)T(x)dx=\frac{n}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\int_{-1}^1 T(x)dx$ 와 같다. <제시문 1>에 의하여 $\int_{-1}^1 T(x)dx=\frac{4\pi}{3}$ 이므로, V_n 의 부피는 $\frac{2n}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 이다.

채점기준

(3점) 원과 내접하는 정 n 각형의 넓이의 비를 올바르게 구할 수 있다.

(5점) V_n 의 부피를 올바르게 구할 수 있다.

[수학 2-iii]

예시답안

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}=1$ 이다. 이를 이용하면, V_n 의 부피의 극한값은

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{3} \times \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}$ 이고, 그 값은 $\frac{4\pi}{3}$ 이다.

채점기준

(3점) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}=1$ 을 이용한다.

(3점) V_n 의 부피의 값을 올바르게 유도한다.

[18]

하위 문항	채점 기준	배점
수학 1- i	접선의 방정식을 구할 수 있다.	5
	이차 방정식의 해를 구할 수 있다.	5
수학 1- ii	도형의 넓이를 정적분으로 표현할 수 있다.	5
	정적분을 구할 수 있다.	10

(1)

함수 $f(x)$ 의 도함수는 $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & (x \leq 0 \text{일 때}) \\ 2x & (x \geq 0 \text{일 때}) \end{cases}$ 이다. 따라서 점 $A(-1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $y - 1 = -3(x + 1)$, 즉 $y = -3x - 2$ 이고 점 B 의 좌표는 $(0, -2)$ 이다. 점 B 를 지나는 직선의 방정식은 $y = mx - 2$ 이므로, $x^2 = mx - 2$ 는 중근을 가져야 한다. 따라서 $m^2 - 8 = 0$ 이 되고, $m = 2\sqrt{2}$ 이다. 이때, 중근은 $\sqrt{2}$ 이 되므로 점 C 의 좌표는 $(\sqrt{2}, 2)$ 이다.

(2)

문제의 넓이는 $\int_{-1}^0 (-x^3 + 3x + 2)dx + \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2)dx$ 이 되고, 이는 $\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \sqrt{2}x^2 + 2x\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

[19]

하위 문항	채점 기준	배점
수학 2- i	이동 방법의 수를 중복순열로 논리적으로 표현할 수 있다.	5
	중복수열의 값을 구할 수 있다.	5
수학 2- ii	각 지점으로부터 목표지점까지 가는 방법의 수를 구할 수 있다.	5
	등비수열의 합을 이용하여 전체 방법의 수를 구할 수 있다.	10

(1) A_0 지점에서 B_{100} 지점으로 이동하기 위해서는 위쪽 도로와 아래쪽 도로 중에서 100개를 선택하면서 오른쪽 방향으로 이동해야 한다. 즉, 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 100개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수이므로, 중복순열의 수 ${}_2H_{100} = 2^{100}$ 이다.

(2) $0 \leq k \leq 99$ 에 대해, A_k 지점에서 출발하여 최초로 오른쪽 혹은 아래쪽으로 이동하여 B_{100} 지점에 도달하는 방법의 수는 2^{100-k} 이다. A_k 지점에서 출발하여 최초 왼쪽으로 이동할 경우, B_{k+1} 지점에 도달해야 하고 B_{k+1} 지점까지 이동하는 방법의 수는 k 이다. 이때 B_{k+1} 지점으로부터 B_{100} 지점까지 이동하는 방법의 수는 2^{99-k} 이다. 즉,

$A_k (0 \leq k \leq 99)$ 지점에서 출발하여 B_{100} 에 가는 방법의 수는 $2^{100-k} + k \cdot 2^{99-k}$

이고, A_{100} 지점에서 출발하여 B_{100} 에 가는 방법의 수는 101가지이다.

따라서 각각의 이동 방법의 수의 합은

$$\begin{aligned} & 2^{100} + (2^{99} + 1 \cdot 2^{98}) + (2^{98} + 2 \cdot 2^{97}) + \cdots + (2^1 + 99 \cdot 2^0) + 101 \\ &= (2^{100} + 2^{99} + \cdots + 2^1 + 1) + (2^{98} + 2^{97} + \cdots + 2^1 + 1) + \cdots + (2 + 1) + 1 + 100 \\ &= (2^{101} - 1) + (2^{99} - 1) + \cdots + (2^1 - 1) + 100 \\ &= 2^{101} + (2^{99} + 2^{98} + \cdots + 2^1 + 1) - 1 \\ &= 2^{101} + 2^{100} - 2 \end{aligned}$$

이다.

[별해]

따라서 각각의 이동 방법의 수의 합은 $\sum_{k=0}^{99} (2^{100-k} + k \cdot 2^{99-k}) + 101$ 이다.

$$\sum_{k=0}^{99} k \cdot 2^{99-k} = S \text{라 하면}$$

$$S = 1 \times 2^{98} + 2 \times 2^{97} + 3 \times 2^{96} + \cdots + 99 \times 2^0$$

$$\frac{S}{2} = 1 \times 2^{97} + 2 \times 2^{96} + 3 \times 2^{95} + \cdots + 99 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{이므로 } S - \frac{S}{2} = 2^{98} + 2^{97} + 2^{96} + \cdots + 2^0 - \frac{99}{2}, \quad \frac{S}{2} = \frac{2^{99} - 1}{2 - 1} - \frac{99}{2}, \quad S = 2^{100} - 101$$

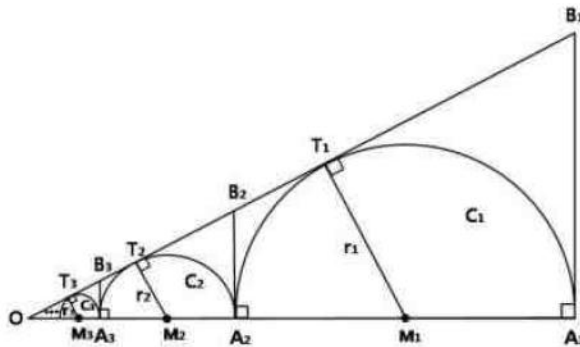
$$\text{이고 } \sum_{k=0}^{99} 2^{100-k} = 2(2^{100} - 1) \text{이므로 구하는 합은}$$

$$\sum_{k=0}^{99} (2^{100-k} + k \cdot 2^{99-k}) + 101 = 2^{100} + 2^{101} - 2$$

[20]

하 위 문항	채점 기준		배 점
1 - i	삼각형 사이의 비례관계를 파악할 수 있다.	$\overline{OB_1} : \overline{A_1B_1} = \overline{OM_1} : \overline{M_1T_1}$	5
	이를 이용하여 반원의 반지름을 얻어낼 수 있다.	$r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	4
	반원의 넓이를 구할 수 있다.	$S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \pi$	3
1 - ii	삼각형 사이의 비례관계를 파악할 수 있다.	$r_1 : r_2 = \overline{OM_1} : \overline{OM_2} = 2 - r_1 : 2 - 2r_1 - r_2$	5
	S_n 을 수식으로 표현할 수 있다.	$S_n = \pi \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$	4
	제시문 2를 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있다.	$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi \frac{3-\sqrt{5}}{4}}{1 - \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{\pi \sqrt{5}}{10}$	4

(1) 아래 그림과 같이 C_n 의 중심을 M_n , C_n 이 선분 $\overline{OB_n}$ 과 접하는 접점을 T_n 라 하자.



$\overline{B_1T_1} = \overline{B_1A_1}$ 이므로 $\overline{OT_1} = \sqrt{5}-1$ 이고 $\overline{OM_1} = 2-r_1$ 이다.

삼각형 OA_1B_1 과 삼각형 OT_1M_1 의 닮음을 이용하여 $\overline{OB_1} : \overline{A_1B_1} = \overline{OM_1} : \overline{M_1T_1}$ 이다.

즉, $\sqrt{5} : 1 = 2-r_1 : r_1$ 을 얻고 이를 풀면 $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 를 얻는다.

따라서 $S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \pi$.

(2) $\overline{B_1T_1} = \overline{B_1A_1}$ 이므로 $\overline{OT_1} = \sqrt{5}-1$ 이고 $\overline{OM_1} = 2-r_1$ 이다.

삼각형 OT_1M_1 과 삼각형 OT_2M_2 의 닮음을 이용하여

$r_1 : r_2 = \overline{OM_1} : \overline{OM_2} = 2-r_1 : 2-2r_1-r_2$ 이다.

즉 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : r_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} : 3-\sqrt{5}-r_2$ 를 얻고 이를 풀면 $r_2 = \sqrt{5}-2$ 가 됨을 알 수 있

다. 따라서 $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{\sqrt{5}-2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 가 된다.

이 비율은 $r_3, r_4, r_5, \dots$ 에서도 마찬가지로 유지되므로 수열 $\{r_n\}$ 은 초항 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이고 공비가 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 인 등비수열임을 알 수 있다.

따라서 $r_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$ 이고

$$S_n = \frac{1}{2} \pi r_n^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right\}^{n-1} = \pi \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

가 된다.

$$\text{따라서 제1문 2에 의해서 } \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi \frac{3-\sqrt{5}}{4}}{1 - \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}$$

[별해]

[1-i]

O를 원점으로 하고 $\overline{OA_1}$ 를 x축으로 가지는 좌표 평면을 생각하자. 반원 C_n 의 중심을 $(a_n, 0)$ 라 하면 반원 C_1 과 직선 $\overline{OB_1}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_1 : (x - a_1)^2 + y^2 = r_1^2$$

$$\overline{OB_1} : y = \frac{1}{2}x$$

C_1 이 점 $A_1(2, 0)$ 을 지나므로 $(2 - a_1)^2 + 0^2 = r_1^2$ 를 얻는다. 그런데 $0 < a_1 < 2$ 이므로

$$2 - a_1 = r_1 \quad \dots (1)$$

한편 C_1 는 $\overline{OB}$ 에 접하므로 $\frac{|a_1 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{1+2^2}} = r_1$ 를 얻고, $0 < a_1 < 2$ 이므로

$$a_1 = \sqrt{5}r_1 \quad \dots (2)$$

가 된다. (1), (2)를 풀면 $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ 을 얻는다.

$$\text{따라서 } S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \pi$$

[1-ii] (1-i)로부터 $A_2(3-\sqrt{5}, 0)$ 임을 알 수 있다. 이제 C_2 의 중점을 $(a_2, 0)$ 라 두고 (1-i)의 경우와 같은 방법으로 $3 - \sqrt{5} - a_2 = r_2$, $\frac{a_2}{\sqrt{5}} = r_2$ 를 얻고 이를 풀면, $r_2 = \sqrt{5}-2$ 가 됨을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{5}-2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{가 된다.}$$

이 비율은 $r_3, r_4, r_5, \dots$ 에서도 마찬가지로 유지되므로 수열 $\{r_n\}$ 은 초항 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 이고 공비가 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 인 등비수열임을 알 수 있다.

따라서 $r_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$ 이고

$S_n = \frac{1}{2} \pi r_n^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right\}^{n-1} = \pi \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$
가 된다.

따라서 제시문 2에 의해서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi \frac{3-\sqrt{5}}{4}}{1 - \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}$

[21]

하 위 문항	채점 기준	배 점
2- i	비례관계 파악 5점	10
	선분 QR 을 a 에 관한 식으로 제시 5점	
2- ii	선분 QR 을 b 로 표현 3점	9
	선분 PH 를 b 로 표현 3점	
	S 를 b 로 표현 3점	
2- iii	최솟값 4를 도출 3점	6
	이때 b 가 문제의 조건을 만족함을 보임 3점	

(1)

점 P 에서 직선 $y=-1$ 에 내린 수선의 발을 H , 선분 $\overline{PH}$ 와 x 축과의 교점을 G 라 하자.

삼각형의 닮음에 의해 $\overline{PG} : \overline{PH} = \overline{FF} : \overline{QR}$

즉 $\sqrt{1-\frac{a^2}{2}} : 1 + \sqrt{1-\frac{a^2}{2}} = 2 : \overline{QR}$ 가 성립한다.

이를 풀면 $\overline{QR} = 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}} \right)$

(별해)[2- i]

$P(a, \sqrt{1-\frac{a^2}{2}})$, $F(-1,0)$, $F(1,0)$ 이므로 $\overline{PF}$ 의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} - 0}{a+1}(x+1) - 0 = \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}}{a+1}(x+1)$$

이를 $y = -1$ 과 연립하면 Q 의 x 좌표는 $-1 - \frac{a+1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}}$ 임을 알 수 있다.

마찬가지로 하면 R 의 x 좌표는 $1 - \frac{a-1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}}$

$$\text{따라서 } \overline{QR} = 1 - \frac{a-1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}} - \left(-1 - \frac{a+1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}} \right) = 2 + \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}}$$

(2)

$b = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}$ 이므로 $[2 - ii]$ 에 의해 $\overline{QR} = 2 + \frac{2}{b}$ 가 된다.

또한, $\overline{PH} = \overline{PG} + \overline{GH} = b + 1$ 이므로 삼각형 PQR 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \overline{PH} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} (1+b) \times 2 \left(1 + \frac{1}{b} \right) = 2 + b + \frac{1}{b}$$

가 된다.

(3) 산술 기하 평균에 의해

$$S = 2 + b + \frac{1}{b} \geq 2 + 2\sqrt{b \times \frac{1}{b}} = 4$$

이 됨을 알 수 있고, 우변의 등호는 $b = \frac{1}{b}$ 일 때, 즉 $b = 1$ 일 때 성립한다.

이때 P 의 좌표는 $P(0,1)$ 가 되어 문제의 조건을 만족한다.

그러므로 최솟값은 4이다.

[22]

[수학 1-i] a_1 의 값은 곡선 $y = x^3 + x$ 와 곡선 $y = x^4 + x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이이다.
방정식 $x^3 + x = x^4 + x^2$ 의 해는 $x = 0, 1$ 이므로, a_1 의 값은 <제시문2>로부터

$\int_0^1 |(x^3 + x) - (x^4 + x^2)| dx$ 이다. 구간 $[0, 1]$ 에서 $x^3 + x \geq x^4 + x^2$ 이므로, 이 정적분의 값은

$$\int_0^1 (x^3 + x - x^4 - x^2) dx \text{이고, 이는 } \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{13}{60} \text{이다.}$$

[수학 1-ii] 일반적으로 자연수 n 에 대하여, 방정식 $x^3 + x = n(x^4 + x^2)$ 의 해는 $x = 0, \frac{1}{n}$

이므로, a_n 의 값은 $\int_0^{\frac{1}{n}} |(x^3+x) - n(x^4+x^2)| dx$ 이다. 마찬가지로, 구간 $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ 에서 $x^3+x \geq n(x^4+x^2)$ 이므로, 이 정적분의 값은 $\int_0^{\frac{1}{n}} (x^3+x - nx^4 - nx^2) dx$ 이고, 이는 $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{n}{5}\left(\frac{1}{n}\right)^5 - \frac{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$ 와 같다. 이를 정리하면 $a_n = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{3+10n^2}{60n^4}$ 이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{20n^2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ 이다.

[수학 1-iii] $a_n = \frac{3+10n^2}{60n^4}$ 이므로, $\sum_{n=1}^{10} n^4 a_n = \frac{1}{60} \sum_{n=1}^{10} (3+10n^2)$ 이다. $\sum_{n=1}^{10} 3 = 30$ 이고 제시문1>에 의해 $\sum_{n=1}^{10} 10n^2 = 10 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 3850$ 이므로, $\sum_{n=1}^{10} n^4 a_n$ 의 값은 $\frac{30+3850}{60} = \frac{194}{3}$ 이다.

[23]

[수학 2-i] $|\cos(\pi x)| = |\cos(\pi(x+1))|$ 이 성립하므로,

$$\int_{-1}^2 |\cos(\pi x)| dx = 3 \times \int_0^1 |\cos(\pi x)| dx \text{이다. 또한 } \int_0^1 |\cos(\pi x)| dx = 2 \times \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) dx$$

이므로, 구하고자 하는 값은 $6 \times \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) dx$ 이다. $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x) dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$ 이므로, 구하고자 하는 값은 $\frac{6}{\pi}$ 이다.

[별해 *] $|\cos(\pi x)| = |\cos(\pi(x+1))|$ 이고, $|\cos(\pi(-x))| = |\cos(\pi x)|$ 가 성립한다. 즉, $|\cos(\pi x)|$ 는 주기가 1이고 y 축에 대칭인 함수이다.

$$\int_{-1}^2 |\cos(\pi x)| dx = 3 \times \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\cos(\pi x)| dx = 3 \times 2 \times \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) dx \text{이다. 따라서 구하고자}$$

하는 값은 $6 \times \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) dx$ 이다. $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(x) dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$ 이므로, 구하고자 하는 값은 $\frac{6}{\pi}$ 이다.

[수학 2-ii] 구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $f'(x) = \cos(\pi x)$ 이고 $f(0) = 0$ 이므로, 이 구간에서 $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ 이다. $f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ 이므로, 자연수 k 에 대하여

$f(x+k) = f(x) + \left(\frac{2}{\pi}\right)k$ 가 모든 실수 x 에 대해 성립하고, 이로부터 $f(-x) = -f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립한다. 따라서 문제의 적분값은 $\int_1^2 f(x)dx$ 와 같다. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\pi}$ 이므로, $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 \left(f(x) + \frac{2}{\pi}\right)dx = \frac{3}{\pi}$

[별해 *] (1)의 결과에 의해 $f'(x+1) = f'(x)$, $f'(-x) = f'(x)$ 가 성립한다.

$f'(-x) = f'(x)$ 의 양변을 부정적분하면 $f(-x) = -f(x) + C$ 인데 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$ 이다. 따라서 $f(-x) = -f(x)$, 즉 원점대칭이다.

$f'(x+1) = f'(x)$ 의 양변을 부정적분하면 $f(x+1) = f(x) + C$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) + C$ 에서 $C = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$ 이다. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}$ 이므로 $C = \frac{2}{\pi}$ 이다.

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x+1)dx = \int_0^1 \left(f(x) + \frac{2}{\pi}\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(f(x) + \frac{2}{\pi}\right)dx = \int_0^1 f(x)dx + \frac{2}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \frac{2}{\pi} \text{에서}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x+1)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left\{f(x) + \frac{2}{\pi}\right\}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x)dx + \frac{1}{\pi}$$

$$\text{따라서 } \int_0^1 \left(f(x) + \frac{2}{\pi}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x)dx + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \frac{3}{\pi} = \frac{3}{\pi}$$

[수학 2-iii] [수학 2-ii]에서와 같이 자연수 k 에 대하여 $g'(x+k) = g'(x) + \left(\frac{2}{\pi}\right)k$ 이고, $g(-x) = -g'(x)$ 이 성립한다. 따라서 $g(-x) = g(x)$ 이고, 문제의 적분식은 $2\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)dx$ 와 같다. 구간 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 에서 $g'(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ 이고 $g(0) = 0$ 이므로,

이 구간에서 $g(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{\pi^2}$ 이다. 따라서 $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}$ 이다. 마찬가지로

구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 에서 $g'(x) = \frac{\sin(\pi(x-1))}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{-\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{2}{\pi}$ 이고 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2}$ 므로,

$g(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)x + \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right)$ 이다. 따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)dx = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}$ 이다. 이를 중

합하면, 구하고자 하는 적분값은 $2\left(\frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}\right) + \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3}\right) = \frac{1}{4\pi} + \frac{3}{2\pi^2} - \frac{3}{\pi^3}$ 이다.

[별해 *] (2)의 결과에 의해 $g'(x+1)=g'(x)+\frac{2}{\pi}$, $g'(-x)=-g'(x)$ 가 성립한다.

$g'(-x)=-g'(x)$ 의 양변을 부정적분하면 $g(-x)=g(x)$ 를 얻고, $g'(x+1)=g'(x)+\frac{2}{\pi}$ 의

양변을 부정적분하면 $g(x+1)=g(x)+\frac{2}{\pi}x+C$ 를 얻는다. $x=-\frac{1}{2}$ 를 대입하면

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\pi}+C \text{이므로 } C=\frac{1}{\pi} \text{이다.}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 g(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left\{ g(x) + \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{\pi} \right\} dx$$

$$= 3 \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx + \frac{1}{4\pi} \text{이다. 구간 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{에서 } g'(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \text{이고 } g(0)=0 \text{이므로, 이}$$

$$\text{구간에서 } g(x) = \frac{1 - \cos(\pi x)}{\pi^2} \text{이다. } \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^3} \text{이고,}$$

$$3 \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx + \frac{1}{4\pi} = \frac{3}{2\pi^2} - \frac{3}{\pi^3} + \frac{1}{4\pi} \text{이다.}$$

[24]

(1) 각 FDC를 x 라 두면, 문제의 조건에서

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 즉 } x = \frac{\pi}{6}$$

따라서

$$T = \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot \pi/6}{2} = 2 + \frac{\pi}{6}.$$

(2) 점 F 에서 선분 DC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, $\angle FDC$ 를 $x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하자.

$$\text{선분 } EF \text{의 길이} = \text{선분 } EH \text{의 길이} - \text{선분 } FH \text{의 길이} = 3 - 2\sin x.$$

이고 호 FC 의 길이는 $2x$ 이므로

$$T = \frac{3 - 2\sin x}{1} + \frac{2x}{2} = 3 - 2\sin x + x$$

$$T'(x) = 1 - 2\cos x \text{이고, } T'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{3}$$

함수 T 의 증감을 표로 나타내면

x	0	...	$\pi/3$	...	$\pi/2$
$T'(x)$		-	0	+	
$T(x)$		$\searrow$	$T(\pi/3)$	$\nearrow$	

따라서 T 는 $x = \pi/3$ 에서 최솟값을 가지고, 이때 선분 AE 의 길이는

$$\overline{AE} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

(3) (2)의 결과에 의해 T 의 값이 최소가 될 때 $\angle FDC = \frac{\pi}{3}$ 이므로

도형 FCH 의 넓이 = 부채꼴 DFC 의 넓이 - 삼각형 DFH 의 넓이

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

이를 이용하면,

도형 $EBCF$ 의 넓이 = 직사각형 $EBCH$ 의 넓이 - 도형 FCH 의 넓이

$$= 3 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

도형 $AEFG$ 의 넓이 = 도형 $ABCG$ 의 넓이 - 도형 $EBCF$ 의 넓이

$$= 6 - \pi - \left(3 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[25]

(1) 두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 짝수와 홀수는 각각 $3n$ 개가 있으므로 두 수가 모두 짝수 또는 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_{3n}C_2 + {}_{3n}C_2$

이다. 따라서 확률은 $\frac{{}_{3n}C_2 + {}_{3n}C_2}{{}_{6n}C_2} = \frac{3n-1}{6n-1}$ 이다.

(2) 두 수의 곱이 6의 배수이려면 적어도 하나가 6의 배수이거나, 둘 다 6의 배수가 아니고 하나는 2의 배수이며 다른 하나는 3의 배수가 되어야 한다. 첫 번째 사건의 경우의 수는 ${}_{6n}C_2 - {}_{5n}C_2$ 이고 두 번째 사건의 경우의 수는 $(3n-n)(2n-n) = 2n^2$ 이다. 따라서 확률

은 $\frac{{}_{6n}C_2 - {}_{5n}C_2 + 2n^2}{{}_{6n}C_2} = \frac{15n-1}{36n-6}$ 이다.

(3) 두 수의 곱이 6의 배수인 사건을 A 라 하고 두 수의 합이 짝수인 사건을 B 라 하자. 그러면 사건 $A \cap B$ 는 두 수가 모두 짝수이며 적어도 하나가 3의 배수인 사건과 같다. 이러

한 사건의 경우의 수는 ${}_{3n}C_2 - {}_{2n}C_2$ 이므로 $P(A \cap B) = \frac{{}_{3n}C_2 - {}_{2n}C_2}{{}_{6n}C_2} = \frac{5n-1}{36n-6}$ 이다.

(2-2)에서 $P(A) = \frac{15n-1}{36n-6}$ 이므로 답은 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{5n-1}{15n-1}$ 이 된다.

(4) <상자1>을 고르는 사건을 X 라 하고 임의로 고른 상자에서 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수인 사건을 Y 라 하자.

그러면 $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y)}{P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y)}$ 을 만족한다.

(2-2)로부터 $P(X \cap Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15n-1}{36n-6} = \frac{15n-1}{72n-12}$ 을 얻는다. <상자2>에서 뽑은 카드에 적힌 두 수의 곱이 6의 배수이려면 적어도 하나가 3의 배수이면 된다.

따라서 $P(X^c \cap Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3nC_2 - {}_{2n}C_2}{{}_3nC_2} = \frac{5n-1}{18n-6}$ 이고 $f(n) = \frac{\frac{15n-1}{72n-12}}{\frac{15n-1}{72n-12} + \frac{5n-1}{18n-6}}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{\frac{15}{72}}{\frac{15}{72} + \frac{5}{18}} = \frac{3}{7} \text{ 을 얻는다.}$$

[26]

(1) 직선 L 의 방정식: $y = mx - 1$ 를 원 C 와 연결하면

$$(m^2 + 1)x^2 - 2mx - 3 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

이 방정식의 두 해를 α, β (단, $\alpha < 0, \beta > 0$)라 하자.

일반성을 잃지 않고 $R(\alpha, m\alpha - 1)(\alpha < 0), S(\beta, m\beta - 1)(\beta > 0)$ 라 두면,

$$\overline{PR}^2 = \alpha^2 + (m\alpha - 1 - 2)^2 = (m^2 + 1)\alpha^2 - 6m\alpha + 18.$$

$$\overline{SD}^2 = \beta^2 + (m\beta - 1 - 2)^2 = (m^2 + 1)\beta^2 - 6m\beta + 18.$$

$$\overline{RS}^2 = (\alpha - \beta)^2 + \{m\alpha - 1 - (m\beta - 1)\}^2 = (m^2 + 1)(\alpha - \beta)^2.$$

$I = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SD}^2$ 라 두고 이를 대입하면

$$\begin{aligned} I &= (m^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2) - 6m(\alpha + \beta) + 18 + (m^2 + 1)(\alpha - \beta)^2 \\ &= (m^2 + 1)\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} - 6m(\alpha + \beta) + 18 + (m^2 + 1)\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} \end{aligned}$$

(*)로부터

$$\alpha + \beta = \frac{2m}{m^2 + 1}, \quad \alpha\beta = \frac{-3}{m^2 + 1} \quad \dots\dots (**)$$

가 성립하므로,

$$\begin{aligned} I &= (m^2 + 1)\left\{\left(\frac{2m}{m^2 + 1}\right)^2 + \frac{6}{m^2 + 1}\right\} - 6m \frac{2m}{m^2 + 1} + 18 + (m^2 + 1)\left\{\left(\frac{2m}{m^2 + 1}\right)^2 + \frac{12}{m^2 + 1}\right\} \\ &= 32 + \frac{4}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

양변을 미분하면

$$I'(m) = \frac{-8m}{(m^2 + 1)^2}$$

따라서 $I'(x) = 0$ 에서 $m = 0$ 을 얻고, 증감을 조사하면

m	-2	...	0	...	2
$I'(m)$		+	0	-	

$I(m)$		$\nearrow$	36	$\searrow$	
--------	--	------------	----	------------	--

따라서 $m=0$ 에서 최댓값을 가진다.

(2) 삼각형 PRS 의 넓이를 A 라 하면,

삼각형 PRS 의 넓이 = 삼각형 PRQ 의 넓이 + 삼각형 PQS 의 넓이이므로

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-\alpha) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \beta = \frac{3}{2}(\beta - \alpha)$$

그런데 (1-1)의 (**)로부터

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\left(\frac{2m}{m^2 + 1}\right)^2 + \frac{12}{m^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{4m^2 + 3}}{m^2 + 1}$$

이므로

$$A(m) = \frac{3\sqrt{4m^2 + 3}}{m^2 + 1}, \quad (-2 \leq m \leq 2)$$

함수 $A(m)$ 에 자연 로그를 취하고

$$\ln A = \ln 3 + \frac{1}{2} \ln(4m^2 + 3) - \ln(m^2 + 1)$$

양변을 미분하면

$$\frac{A'}{A} = \frac{4m}{4m^2 + 3} - \frac{2m}{m^2 + 1} = \frac{-2m(2m^2 + 1)}{(4m^2 + 3)(m^2 + 1)^2}$$

따라서

$$A' = \frac{-6m(2m^2 + 1)\sqrt{4m^2 + 3}}{(4m^2 + 3)(m^2 + 1)^2}$$

$A'(x) = 0$ 에서 $m=0$ 을 얻고, 증감을 조사하면

m	-2	...	0	...	2
$A'(m)$		+	0	-	
$A(m)$		$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	

따라서 $m=0$ 에서 최댓값을 가진다.

[27]

(1) $f(x)$ 는 구간 (x_0, x_1) 에서 기울기 2인 일차함수이고 구간 (x_{2017}, x_{2018}) 에서 기울기 -3인 일차함수이다. 따라서 $f(x_1) = f(x_0) + 2 = \sqrt{2} + 2$, $f(x_{2017}) = f(x_{2018}) + 3 = \sqrt{3} + 3$ 이다.

(2) $f(x)$ 는 구간 (x_{1008}, x_{1009}) 에서 기울기 2인 일차함수이고 구간 (x_{1009}, x_{1010}) 에서 기울기 -3인 일차함수이다. 따라서 $\frac{f(x_{1009}) - f(x_{1008})}{x_{1009} - x_{1008}} = 2$, $\frac{f(x_{1010}) - f(x_{1009})}{x_{1010} - x_{1009}} = -3$ 이다. 연립

방정식에서 x_{1009} 을 소거하면 $f(x_{1009}) = \frac{3}{5}f(x_{1008}) + \frac{2}{5}f(x_{1010}) + \frac{6}{5}(x_{1010} - x_{1008})$ 을 얻는다.

주어진 값을 넣으면 $f(x_{1009}) = \frac{12+3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{5}$ 을 얻고 이를 통해 $x_{1009} = \frac{251-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{5}$ 을 얻는다.

(3) $\sum$ 의 성질에 의해 $\sum_{n=0}^{2018} (-1)^n f(x_n) = \sum_{m=0}^{1009} f(x_{2m}) - \sum_{m=0}^{1008} f(x_{2m+1})$ 로 나타낼 수 있다.
 (2)와 같은 원리에 의해 $0 \leq m \leq 1008$ 을 만족하는 임의의 정수 m 에 대하여 $f(x_{2m+1}) = \frac{3}{5}f(x_{2m}) + \frac{2}{5}f(x_{2m+2}) + \frac{6}{5}(x_{2m+2} - x_{2m})$ 이 성립한다.

따라서 $\sum$ 의 성질에 의해

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{1008} f(x_{2m+1}) &= \sum_{m=0}^{1008} \left(\frac{3}{5}f(x_{2m}) + \frac{2}{5}f(x_{2m+2}) + \frac{6}{5}(x_{2m+2} - x_{2m}) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{1009} f(x_{2m}) - \frac{2}{5}f(x_0) - \frac{3}{5}f(x_{2018}) - \frac{6}{5}x_0 + \frac{6}{5}x_{2018} \text{ 이므로} \\ \sum_{n=0}^{2018} (-1)^n f(x_n) &= \sum_{m=0}^{1009} f(x_{2m}) - \sum_{m=0}^{1008} f(x_{2m+1}) = \frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{3} - 120 \text{ 을 얻는다.} \end{aligned}$$

[별해]

증가하는 구간의 길이의 합을 t 라 하면 감소하는 구간의 길이의 합은 $100-t$ 가 된다. 따라서 구간 $[0,100]$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 총 증가량은 $2t - 3(100-t) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 가 된다. 이를 풀면 $t = 60 - \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5}$ 을 얻는다. 증가하는 구간은 (x_{2m}, x_{2m+1}) ($0 \leq m \leq 1008$)이므로

$t = \sum_{m=0}^{1008} (x_{2m+1} - x_{2m}) = \sum_{m=0}^{1008} \frac{f(x_{2m+1}) - f(x_{2m})}{2} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{2018} (-1)^n f(x_n) - f(x_{2018}) \right)$ 이 된다.

따라서 $\sum_{n=0}^{2018} (-1)^n f(x_n) = f(x_{2018}) - 2t = \frac{2}{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{3} - 120$ 을 얻는다.

[28]

(1) 문제의 조건에 의해 점 C 혹은 D 의 x 좌표를 b 라 하면 $b^2 - 1 = a$ 을 만족해야 한다. 따라서 $b = \pm \sqrt{a+1}$ 이 되고, 일반성을 잃지 않고 점 C 와 점 D 를 각각

$$C(-\sqrt{a+1}, a), D(\sqrt{a+1}, a)$$

라 둘 수 있다. 따라서 삼각형 ACD 의 넓이는

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (1-a) \times 2\sqrt{a+1} = (1-a)\sqrt{a+1}$$

이 된다. 한편 <다>에 의하여

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_{-\sqrt{a+1}}^{\sqrt{a+1}} a - (x^2 - 1) dx \\
 &= -\frac{2}{3} \sqrt{(a+1)^3} + 2(a+1) \sqrt{a+1} \\
 &= \frac{4}{3} \sqrt{(a+1)^3}
 \end{aligned}$$

따라서

$$S = S_1 \times S_2 = \frac{4}{3}(1-a)(a+1)^2$$

을 얻는다.

채점기준

S_1 을 a 를 이용하여 나타내고 그 이유를 제시할 수 있다. (4점)

S_2 를 a 를 이용하여 나타내고 그 이유를 제시할 수 있다. (4점)

S_3 를 a 를 이용하여 나타내고 그 이유를 제시할 수 있다. (2점)

$$(2) S = \frac{4}{3}(1-a)(a+1)^2$$

$$= \frac{4}{3}(-a^3 - a^2 + a + 1)$$

을 미분하면

$$S' = -\frac{4}{3}(a+1)(3a-1)$$

을 얻는다. 증감표를 조사하면

a	-1		$\frac{1}{3}$		1
S'		$+$		$-$	
S	0	$\nearrow$	$S\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	0

가 되어 $a = \frac{1}{3}$ 일 때 최댓값을 가짐을 알 수 있고 이때 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{128}{81}$$

이 된다.

채점기준

S 의 도함수를 구할 수 있다. (2점)

증감표를 이용하여 함수의 증가 감소를 나타낼 수 있다. (4점)

최댓값을 가지는 a 와 그때의 최댓값을 구할 수 있다. (4점)

[29]

(1) 삼각형 $E_1D_1C_1$ 은 정삼각형이므로 $\angle E_1D_1C_1 = \frac{\pi}{3}$ 이다.

한편 $\angle B_1D_1C_1 = \frac{\pi}{4}$ 이고 B_2 는 선분 $\overline{D_1B_1}$ 과 원호 $\widehat{A_1C_1}$ 의 교점이므로

$$\angle E_1D_1B_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

임을 알 수 있다.

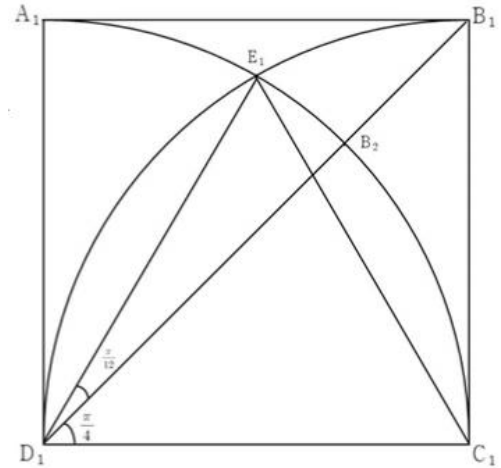
따라서 원호 $\widehat{E_1B_2}$ 의 길이는

$$1 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

이고, 도형 $E_1F_1G_1H_1$ 의 둘레의 길이는

$$8 \times \frac{\pi}{12} = \frac{2}{3}\pi$$

이다.



채점기준

$\angle E_1D_1B_2$ 를 구하고 이 이유를 제시할 수 있다. (4점)

도형 $E_1F_1G_1H_1$ 둘레의 길이를 구하고 그 이유를 제시 할 수 있다. (2점)

(2) 대각선 $\overline{A_1C_1}$ 과 $\overline{B_1D_1}$ 이 만나는 점을 O 라 하자.

오른쪽 그림에서

$$\overline{D_1O} = \frac{1}{2} \overline{D_1B_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad - (1)$$

$$\overline{D_2O} = \overline{OB_2} = \overline{D_1B_2} - \overline{D_1O} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad - (2)$$

임을 알 수 있다.

삼각형 OD_2C_2 와 삼각형 OD_1C_1 이

닮은 삼각형이므로

$$\overline{OD_2} : \overline{OD_1} = \overline{D_2C_2} : \overline{D_1C_1}$$

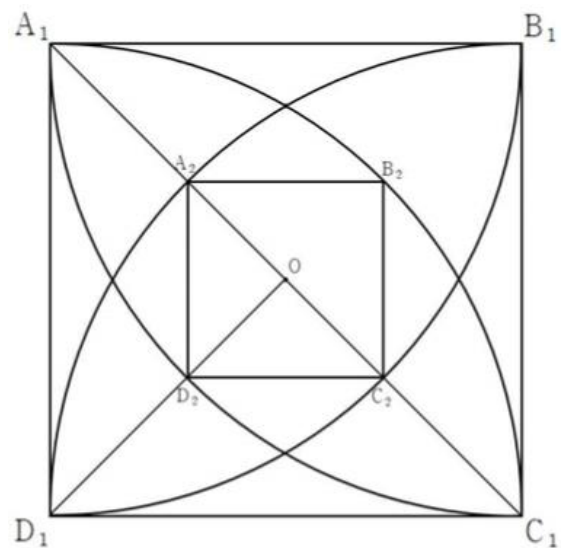
이 성립하고, (1)과 (2)를 대입하면

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{D_2C_2} : 1$$

을 얻는다. 이로부터

$$\overline{D_2C_2} = \sqrt{2} - 1$$

임을 알 수 있다.



이로부터 정6각형 T 의 내부에서 영역 S 에 포함되지 않는 영역의 넓이는

$$6\left(\frac{\pi}{6}\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

이다. 정6각형 T 내부의 넓이는 $f(6)=3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로, 영역 S 의 넓이는 $g(6)=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{4}$ 이다.

(3) [1-2] 답안에서와 같은 방법으로, 호 CDF 의 넓이는 $\frac{\pi(n-4)}{2n}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 이고, 이등변 삼각형 ACD 와 BCF 각각의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 임을 알 수 있다. 이로부터 정 n 각형 T 의 내부에서 영역 S 에 포함되지 않는 영역의 넓이는

$$n\left(\frac{\pi(n-4)}{2n}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

이다. 다시 정 n 각형 T 내부의 넓이는 $f(n)=\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 이므로, 영역 S 의 넓이는

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)-n\left(\frac{\pi(n-4)}{2n}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \\ &= \frac{n}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)-\frac{\pi(n-4)}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

이다. 위 문항으로부터 $n(f(n)-g(2n))=\pi n(n-2)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ 을 얻을 수 있다. 이를 다시 정리하면,

$$n(f(n)-g(2n))=\frac{\pi^3(n-2)}{4n}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}\text{이고, <제시문 1>에 의해 이의 극한값은 }\frac{\pi^3}{4}\text{이다.}$$

[별해]

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(n)-g(2n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)-\left\{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)-2n\left(\frac{\pi(2n-4)}{4n}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left\{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\pi(n-2)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)+2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-1)+\pi n(n-2)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)+2n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-1)=\lim_{n \rightarrow \infty} n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{-\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+1}=0\text{이고,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^3}{2n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi^2}{4n^2}} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\text{구하는 극한값은 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \pi n(n-2) \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^3(n-2)}{4n} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} = \frac{\pi^3}{4}$$

[31]

(1) 집합 $A = \{x | x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대해 함수 $g: A \rightarrow B$ 를 $g(i) = f(i+1) - f(i)$ 라 정의하면 g 는 $0 \leq \sum_{i=1}^9 g(i) = f(10) - f(1) \leq 7$ 을 만족한다. 정수 $0 \leq k \leq 7$ 에 대하여 $\sum_{i=1}^9 g(i) = k$ 라 하면, $g(i)$ 중 1인 값이 k 개, 0인 값이 $9-k$ 가 되어야 하므로 이러한 함수 g 의 개수는 ${}_9C_k$ 가 된다. 함수 f 는 g 에 의해 결정되므로 조건을 만족하는 f 의 개수는 $\sum_{k=0}^7 {}_9C_k = \sum_{k=0}^9 {}_9C_k - {}_9C_8 - {}_9C_9 = 2^9 - 9 - 1 = 502$ 이다.

(2) 집합 $A = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대해 함수 $g: A \rightarrow B$ 를 $g(i) = f(i+1) - f(i)$ 라 정의하면 g 는 $g(i) \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$ 이고 $\sum_{i=1}^5 g(i) = 20$ 을 만족한다. 따라서 $g(1), g(2), \dots, g(5)$ 를 크기순으로 나열하면

$$(7, 7, 3, 2, 1), (7, 7, 2, 2, 2), (7, 5, 5, 2, 1), (7, 5, 3, 3, 2), (5, 5, 5, 3, 2)$$

가 있다. $g(1), g(2), \dots, g(5)$ 는 이러한 순서쌍 중 하나를 골라 그 안에 있는 숫자들을 배열해서 얻어진 순열이 된다. 이러한 순열들의 개수를 구하면

$$\frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} = 60 + 10 + 60 + 60 + 20 = 210$$

[학교해설]

집합 $A = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대해 함수 $g: A \rightarrow B$ 를 $g(i) = f(i+1) - f(i)$ 라 정의하면 g 는 $g(i) \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$ 이고 $\sum_{i=1}^5 g(i) = 20$ 을 만족한다. 따라서 $g(1), g(2), \dots, g(5)$ 를 크기순으로 나열하면 1, 2, 3, 5, 7을 사용하여 나타낸 20의 자연수 분할이 된다. 이러한 것들은 $(7, 7, 3, 2, 1), (7, 7, 2, 2, 2), (7, 5, 5, 2, 1), (7, 5, 3, 3, 2), (5, 5, 5, 3, 2)$ 가 있다. $g(1), g(2), \dots, g(5)$ 는 이러한 자연수분할 중 하나를 골라 그 안에 있는 숫자들을 배열해서 얻어진 순열이 된다. 이러한 순열들의 개수를 구하면

$$\frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} = 60 + 10 + 60 + 60 + 20 = 210 \text{이 된다.}$$

(3) 집합 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x|x \text{는 자연수}\}$ 에 대해 함수 $g: A \rightarrow B$ 를 $g(i) = f(i+1) - f(i)$ 라 정의하면 함수 g 는 다음 세 가지 조건을 만족한다.

- ① $0 \leq g(i) \leq 4$
- ② $g(1) \geq g(2) \geq \dots \geq g(8)$
- ③ $g(1) + g(2) + \dots + g(8) \leq 26$

조건 ①, ②에서 $g(1), \dots, g(8)$ 은 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 8개를 고르는 것에 대응된다. 이렇게 고르는 방법의 수는 ${}_5H_8 = {}_{12}C_8 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$ 이다. 조건 ③은 이렇게 선택된 숫자들의 합이 26이하가 되어야 함을 의미한다. 따라서 선택된 숫자의 합이 27, 28, 29, 30, 31, 32가 되는 경우의 수를 빼야한다.

그러한 경우의 수는, 선택된 숫자의 합이 $32 - k$ ($0 \leq k \leq 5$), $h(i) = 4 - g(i)$ ($1 \leq i \leq 8$)라 하면 $0 \leq h(i) \leq 4$, $h(1) \leq \dots \leq h(8)$, $h(1) + \dots + h(8) = k$ 를 만족하는 경우의 수와 같다. 그 경우들을 생각하면 $(h(1), \dots, h(8))$ 순서쌍은

- $k=0$ 일 때 1가지 $(0, \dots, 0, 0)$,
- $k=1$ 일 때 1가지 $(0, \dots, 0, 1)$
- $k=2$ 일 때 2가지 $(0, \dots, 0, 2)(0, \dots, 0, 1, 1)$
- $k=3$ 일 때 3가지 $(0, \dots, 0, 3)(0, \dots, 1, 2)(0, \dots, 0, 1, 1, 1)$
- $k=4$ 일 때 5가지 $(0, \dots, 0, 4)(0, \dots, 1, 3)(0, \dots, 2, 2)(0, \dots, 0, 1, 1, 2)(0, \dots, 0, 1, 1, 1, 1)$
- $k=5$ 일 때 6가지 $(0, \dots, 1, 4)(0, \dots, 2, 3)(0, \dots, 0, 1, 1, 3)(0, \dots, 0, 1, 2, 2)(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2)(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$

따라서 답은 $495 - 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 6 = 477$ 이다.

[학교해설]

집합 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x|x \text{는 자연수}\}$ 에 대해 함수 $g: A \rightarrow B$ 를 $g(i) = f(i+1) - f(i)$ 라 정의하면 함수 g 는 다음 세 가지 조건을 만족한다.

- (1) $0 \leq g(i) \leq 4$
- (2) $g(1) \geq g(2) \geq \dots \geq g(8)$
- (3) $g(1) + g(2) + \dots + g(8) \leq 26$

조건 (1), (2)에서 $g(1), \dots, g(8)$ 은 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 8개를 고르는 것에 대응된다. 이렇게 고르는 방법의 수는 ${}_5H_8 = {}_{12}C_8 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$ 이다. 조건 (3)

은 이렇게 선택된 숫자들의 합이 26이하가 되어야 함을 의미한다. 따라서 선택된 숫자의 합이 27, 28, 29, 30, 31, 32가 되는 경우의 수를 빼야한다. 선택된 숫자의 합이 $32 - k$ ($0 \leq k \leq 5$)라 하고 $h(i) = 4 - g(i)$ ($1 \leq i \leq 8$)라 하면 $0 \leq h(i) \leq 4$, $h(1) \leq \dots \leq h(8)$, $h(1) + \dots + h(8) = k$ 이므로 이러한 h 에서 $h(i) > 0$ 인 것들을 모은 것은 1, 2, 3, 4로 이루어진 k 의 자연수분할과 대응된다. 이러한 것들의 개수를 구하면 $k=0$ 일 때 1가지, $k=1$ 일 때 1가지 (1), $k=2$ 일 때 2가지 (2, 11), $k=3$ 일 때 3가지 (3, 21, 111), $k=4$ 일 때 5가지 (4, 31, 22, 211, 1111), $k=5$ 일 때 6가지 (41, 32, 311, 221, 2111, 11111)이다. 따라서 답은 $495 - 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 6 = 477$ 이다.

(4) $f(i+1)-f(i)$ 에서 유추하여 $x_1=f(1)-1$, $x_2=f(2)-f(1)$, $x_3=f(3)-f(2)$, $x_4=f(4)-f(3)$, $x_5=f(5)-f(4)$, $x_6=13-f(5)$ 라 하면 $x_1+\cdots+x_6=12$, $x_i \geq 0$, $x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 7$ 을 만족한다. $x_1+\cdots+x_6=12$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_6H_{12} = {}_{17}C_{12} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6188$ 이다. 여기서 조건 $x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 7$ 을 만족하지 않는 것은 정확히 하나의 $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ 에 대해 $x_k \geq 8$ 이 된다. (왜냐하면 두 개 이상이 8 이상이면 합이 16 이상이 된다.) $k=2$ 의 경우, $x_1+\cdots+x_6=12$ 의 음이 아닌 정수해 중에서 $x_2 \geq 8$ 인 것들의 개수는 $y_2=x_2-8$ 로 치환하면 $x_1+y_2+x_3+\cdots+x_6=4$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 ${}_6H_4 = {}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ 이다. $k=3, 4, 5$ 인 경우도 같은 방법으로 하면 126개가 나온다. 따라서 답은 $6188 - 4 \cdot 126 = 5684$ 이다.

[32]

(1) $f'(x) = 4x^3 - 28x - 24 = 4(x+2)(x+1)(x-3)$ 이므로 $f(x)$ 는 -2 에서 극소, -1 에서 극대, 3 에서 극솟값을 갖는다. $f(-2)=35$, $f(-1)=38$, $f(3)=-90$ 이므로 k 의 범위는 $35 < k < 38$ 이다.

(2) $g(x) = x^4 - (m+14)x^2 - 24x$ 라 하면 문제의 조건은 $y=g(x)$ 와 $y=r-27$ 이 서로 다른 4개의 해를 갖는 실수 r 이 존재하는 것과 같다. 이러할 필요충분조건은 $y=g(x)$ 가 $x=a$ 에서 극소, $x=b$ 에서 극대, $x=c$ 에서 극솟값을 갖는 실수 $a < b < c$ 가 존재하는 것이다. 이는 $y=g'(x)$ 가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나는 것과 필요충분조건이다. $g'(x) = 4x^3 - 2(m+14)x - 24 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은 $g''(x) = 12x^2 - 2(m+14) = 0$ 의 두 근 $\pm \alpha$ 이 실수이며 $g'(-\alpha) > 0$ 와 $g'(\alpha) < 0$ 을 만족하는 것이다. 여기서 $\alpha = \sqrt{\frac{m+14}{6}}$ 이다. 이를 계산하면 $\alpha > \sqrt[3]{3}$ 이 되고 $m > 6\sqrt[3]{9} - 14$ 을 얻는다.

[33]

(1) 함수 $y = \frac{x}{4}$ 의 그래프와 $y = f(x)$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점은

$$O = (0, 0), \left(\frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

이고, 영역 P 는 두 개의 삼각형으로 이루어져 있다.

첫 번째 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{8}{5} = \frac{3}{5}$ 이고, 두 번째 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{16}{5} - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{15}$ 이다. 이로부터 $g(4) = \frac{3}{5} + \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$ 를 얻을 수 있다.

(2) 자연수 $1 \leq \ell \leq n$ 에 대하여 영역 P 에서 x 축의 닫힌 구간 $[2\ell - 2, 2\ell]$ 위에 놓인 부분은 다음의 세 점

$$(2\ell - 1, 1), \left(\frac{(2\ell - 2)m}{m - 1}, \frac{2\ell - 2}{m - 1}\right), \left(\frac{(2\ell)m}{m + 1}, \frac{2\ell}{m + 1}\right)$$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다. 따라서 이 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\ell - 1}{m}\right) \left(\frac{(2\ell)m}{m + 1} - \frac{(2\ell - 2)m}{m - 1}\right) = 1 + 2 \left(\frac{(\ell - 1)^2}{m - 1} - \frac{\ell^2}{m + 1}\right)$$

이고, 이를 더해서

$$g(m) = \sum_{\ell=1}^n \left(1 + \frac{2(\ell - 1)^2}{m - 1} - \frac{2\ell^2}{m + 1}\right) = n + \frac{1}{3} \left(\frac{(n - 1)n(2n - 1)}{m - 1} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{m + 1}\right)$$

를 얻을 수 있다. 따라서 문제의 식은

$$3(n - g(m)) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{m + 1} - \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{m - 1}$$

이 되고 $f(n) = n(n + 1)(2n + 1)$ 임을 알 수 있다.

[★별해]

$P_l = (2l, 0)$, $Q_l = (2l - 1, 1)$ 라 두자. ($l = 1, 2, \dots, n$)

l 번째 삼각형($\triangle P_{l-1}Q_lP_l$)에서 색칠한 부분을 제외한 넓이를 S_l 이라 하면

$$\sum_{l=1}^n S_l = n - g(m) \text{임을 알 수 있다.}$$

직선 $\overline{P_{l-1}Q_l}$: $y = x - (2l - 2)$ 과 $y = \frac{1}{m}x$ 의 교점은 $A_l\left(\frac{m}{m - 1}(2l - 2), \frac{1}{m - 1}(2l - 2)\right)$

직선 $\overline{P_lQ_l}$: $y = -(x - 2l)$ 과 $y = \frac{1}{m}x$ 의 교점은 $B_l\left(\frac{m}{m + 1}2l, \frac{1}{m + 1}2l\right)$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } S_l &= \triangle OB_lP_l - \triangle OA_lP_{l-1} = \frac{1}{2} \times 2l \times \frac{1}{m + 1}2l - \frac{1}{2} \times (2l - 2) \times \frac{1}{m - 1}(2l - 2) \\ &= 2 \left(\frac{1}{m + 1}l^2 - \frac{1}{m - 1}(l - 1)^2 \right) \end{aligned}$$

$$3(n - g(m)) = 3 \sum_{l=1}^n S_l = 6 \left(\frac{1}{m + 1} \sum_{l=1}^n l^2 - \frac{1}{m - 1} \sum_{l=1}^n (l - 1)^2 \right) = 6 \left(\frac{1}{m + 1} \sum_{l=1}^n l^2 - \frac{1}{m - 1} \sum_{l=1}^{n-1} l^2 \right)$$

$$\text{이므로 } f(n) = 6 \sum_{l=1}^n l^2 = n(n + 1)(2n + 1)$$

(3) 부등식 $2n - 1 \leq m < 2n + 1$ 을 만족하는 n 에 대하여 $1 - \frac{1}{m} < 2\left(\frac{n}{m}\right) \leq 1 + \frac{1}{m}$ 이므로,

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ 가 된다. [2-2]로부터

$$\begin{aligned}\frac{g(m)}{m} &= \frac{n}{m} - \frac{1}{3} \left(\frac{n}{m} \right) \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{m+1} - \frac{(n-1)(2n-1)}{m-1} \right) \\ &= \frac{n}{m} - \frac{1}{3} \left(\frac{n}{m} \right) \left(\frac{6nm - 4n^2 - 2}{(m+1)(m-1)} \right) = \frac{n}{m} - \frac{1}{3} \left(\frac{n}{m} \right) \frac{6 \left(\frac{n}{m} \right) - 4 \left(\frac{n}{m} \right)^2 - \frac{2}{m^2}}{\left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(1 - \frac{1}{m} \right)}\end{aligned}$$

를 얻게 된다. 따라서 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g(m)}{m}$ 의 값은 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(6 \times \frac{1}{2} - 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{6}$ 이다.

[34]

(1)

$uv=0$ 일 때 곡선 C 는 선분이 되며, 이 선분이 P 와 만나게 될 필요충분조건은 $u^2=1$ 또는 $v^2=1$ 이다. 즉, $(u,v) \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$ 이다.

$uv \neq 0$ 을 가정하고, 이 때 곡선 C 가 P 에 접하기 위한 조건을 살펴보자. 곡선 C 위의 점 (x_0, y_0) 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_0 x}{u^2} + \frac{y_0 y}{v^2} = 1$ 이므로, 곡선 C 가 P 에서 제 1사분면에서 접하기 위한 조건은 이 접선이 P 를 이루는 네 개의 선분 중 하나여야 한다는 것이다.

이로부터 $\left| \frac{x_0}{u^2} \right| = \left| \frac{y_0}{v^2} \right| = 1$ 을 얻게 되고, 이를 식 $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1$ 에 대입하면 $u^2 + v^2 = 1$ 을 얻게 된다. 다시 말해, $u^2 + v^2 < 1$ 인 경우 곡선 C 는 P 와 만나지 않게 된다.

따라서 집합 S 는 좌표평면 위에서 반지름이 1이고 중심이 원점인 원이 되어, 곡선의 길이는 2π 이다.

(2)

$uv=0$ 일 때 곡선 C 는 선분이 되며, 이 때 두 점 F, F' 은 선분의 양 끝점이 된다. 이 두 점 사이의 거리는 $2 > \sqrt{2}$ 이다.

$uv \neq 0$ 을 가정하고, $v \geq u > 0$ 을 가정하자. 이 때, $\overline{FF'}$ 의 값은 <제시문2>에 의해 $2\sqrt{v^2 - u^2}$ 가 된다. 조건 $\overline{FF'} = \sqrt{2}$ 로부터 $2\sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{2}$ 을 얻게 되고, 문제 (1)의 결과에 의해 $u^2 + v^2 = 1$ 을 만족하므로 $(u, v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 를 의미한다. 그리고 $\overline{FF'} = 0$ 인 경우는

$u = v$ 인 경우이므로 $(u, v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 가 된다. 따라서 점 (u, v) 자취의 길이는

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ 이고, $u \geq v > 0$ 인 경우 $v \geq u > 0$ 에서와 같은 방법으로 $(u, v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

에서부터 $(u, v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ 까지 해서 자취의 길이는 $\frac{\pi}{12}$ 가 되고 위와 같은 형태로 각 사분

면 마다 한 번씩 나타나게 되므로 전체 곡선의 길이의 합은 $8 \times \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$ 이다.

[35]

(1)

각각의 공이 A, B, C 세 개의 상자에 들어갈 수 있으므로, <제시문2>에 의해 총 경우의 수는 $3 \times \dots \times 3 = 3^7 = 2187$ 이다.

(2)

상자 A 에 공이 하나도 들어있지 않고, 상자 B, C 에 각각 적어도 한 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $2^7 - 2 = 126$ 이다.

상자 A, B 에 공이 하나도 들어있지 않을 경우의 수는 1이다.

따라서 <제시문1>에 의해, 상자 A, B, C 에 각각 적어도 한 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $3^7 - 3(2^7 - 2 + 1) = 1806$ 이다.

(3)

상자 A 에 공이 한 개 들어있고, 상자 B, C 에 적어도 두 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $7(2^6 - 2 \times 6 - 2) = 350$ 이다.

상자 A, B 에 각각 한 개의 공이 들어있고, 상자 C 에 나머지 공이 모두 들어있을 경우의 수는 $7 \times 6 = 42$ 이다.

상자 A 에 공이 하나도 들어있지 않고, 상자 B, C 에 각각 적어도 한 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $2^7 - 2 = 126$ 이다.

상자 A, B 에 공이 하나도 들어있지 않을 경우의 수는 1이다.

따라서 <제시문1>에 의해, 상자 A, B, C 에 각각 적어도 두 개의 공이 들어있을 경우의 수는 $2187 - 3(350 + 42 + 126 + 1) = 630$ 이다.

[별해] 7개의 공을 2개, 2개, 3개의 묶음으로 나눈 후 3개의 상자에 배열하면 된다.

따라서 상자 A, B, C 에 각각 적어도 두 개의 공이 들어있을 경우의 수는

$${}_7C_3 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 630 \text{이다.}$$

[36]

(1-1) $f(0) = a_4$ 이므로, 숫자 4가 정확히 두 번 선택되어질 확률을 구하면 된다.

총 열 번의 주사위 던짐에서 숫자 4가 선택되어질 두 번의 횟수차를 선택하는 방법이 ${}_{10}C_2 = 45$ 이고 나머지 여덟 번의 횟수차에는 1, 2, 3의 숫자 중 어느 것이 선택되어도 되므로, 확률은 다음과 같다.

$$45 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^8 = 5 \left(\frac{3}{4} \right)^{10}$$

(1-2) 먼저 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선인 경우는 항상 3혹은 4가 선택되는 경우이므로, 그 확률은 $\left(\frac{2}{4}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 이다. 따라서, $y=f(x)$ 의 그래프가 직선이 아닐 확률은 $1 - \frac{1}{2^{10}}$ 이다.

이제 $f'(2) = 12a_1 + 4a_2 + a_3 \geq 100$ 을 만족하면서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$ 인 음이 아닌 정수 a_1, a_2, a_3, a_4 을 찾아보자. 먼저, $a_1 \leq 7$ 이라면 $12a_1 + 4a_2 + a_3 \leq 12 \times 7 + 4 \times 3 = 96$ 이 되어, 항상 $a_1 \geq 8$ 임을 알 수 있다. 따라서, a_1 이 될 수 있는 숫자는 8, 9, 10 세 가지 밖에 없으며, 각각의 경우에 가능한 숫자 a_2, a_3, a_4 를 구해보면 다음의 일곱 가지 경우가 나온다.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (10, 0, 0, 0), (9, 1, 0, 0), (9, 0, 1, 0), (9, 0, 0, 1) \\ (8, 2, 0, 0), (8, 1, 1, 0), (8, 1, 0, 1)$$

여기서 어떠한 경우에도 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선이 아니다.

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (10, 0, 0, 0)$ 인 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (9, 1, 0, 0), (9, 0, 1, 0), (9, 0, 0, 1)$ 인 경우 각각의 확률은 ${}_{10}C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 10 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (8, 2, 0, 0)$ 인 경우의 확률은 ${}_{10}C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 45 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (8, 1, 1, 0), (8, 1, 0, 1)$ 인 경우 각각의 확률은 ${}_{10}P_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 90 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

따라서, $y=f(x)$ 의 그래프가 직선이 아니면서 $f'(2) \geq 100$ 을 만족할 확률은 다음과 같다.

$$(1 + 3 \times 10 + 45 + 2 \times 90) \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 256 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \left(\frac{1}{4}\right)^6$$

$$\text{따라서 문제의 확률은 } \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \frac{1}{2^{10}}} = \frac{1}{4(2^{10} - 1)} = \frac{1}{4092} \text{이다.}$$

(1-3) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 이 만나지 않을 확률을 먼저 구하자.

3차 다항식의 그래프는 항상 x 축과 평행한 직선과 만나므로, $a_1=0$ 이어야 한다.

만약 $a_2=0$ 이라면, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선이 되고 이 직선이 $y=8$ 과 만나지 않으려면 $(a_3, a_4) = (0, 10)$ 이어야 한다. 이 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

만약 $a_2 \geq 1$ 이라면, 이차방정식 $a_2x^2 + a_3x + a_4 - 8 = 0$ 의 해가 존재하지 않는 경우를 찾는 것이고, 이는 곧 $a_3^2 < 4a_2(a_4 - 8)$ 임을 의미한다. 이를 만족하는 숫자 a_2, a_3, a_4 는

$(a_2, a_3, a_4) = (1, 0, 9)$ 이며, 이 경우의 확률은 ${}_{10}C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

따라서 문제에서 구하고자 하는 확률은 $1 - (1 + 10) \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 1 - 11 \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ 이다.

[37]

(2-1) 조건 $\int_{\pi}^{2\pi} g(x)dx = -6$ 으로부터,

$$-6 = \int_{\pi}^{2\pi} (2a_1 \cos(x-\pi) + (b_1-1) \sin(x-\pi))dx = 2(b_1-1) \text{을 얻게 된다.}$$

따라서 $b_1 = -2$ 이다.

(2-2) 양의 정수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 에서

$$g(x) = 2^n a_n \cos(x-n\pi) + (b_n + (-1)^n) \sin(x-n\pi)$$

이므로,

$$g'(x) = -2^n a_n \sin(x-n\pi) + (b_n + (-1)^n) \cos(x-n\pi)$$

을 얻게 된다. 따라서, $g'(n\pi) = b_n + (-1)^n$ 임을 알 수 있다.

한편, 2 이상인 정수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$ 에서

$$g(x) = 2^{n-1} a_{n-1} \cos(x-(n-1)\pi) + (b_{n-1} + (-1)^{n-1}) \sin(x-(n-1)\pi)$$

이고, $g'(x) = -2^{n-1} a_{n-1} \sin(x-(n-1)\pi) + (b_{n-1} + (-1)^{n-1}) \cos(x-(n-1)\pi)$ 이 되어,

$g'(n\pi) = -(b_{n-1} + (-1)^{n-1})$ 이 됨을 알 수 있다.

따라서, $b_n + (-1)^n = -(b_{n-1} + (-1)^{n-1})$ 이 되고, $b_n = -b_{n-1}$ 이다. $b_1 = -2$ 로부터

$b_n = 2(-1)^n$ 임을 알 수 있다.

이제 정적분 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x)dx$ 의 값은

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{100\pi} g(x)dx &= \sum_{n=1}^{99} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{99} \left[2^n a_n \sin(x-n\pi) - (b_n + (-1)^n) \cos(x-n\pi) \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{99} 2(b_n + (-1)^n) \\ &= 6 \sum_{n=1}^{99} (-1)^n = -6 \end{aligned}$$

이다.

(2-3) 닫힌 구간 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 에서 $g(x) = 2^n a_n \cos(x-n\pi) + (b_n + (-1)^n) \sin(x-n\pi)$ 이

고, 닫힌 구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$ 에서

$g(x) = 2^{n-1} a_{n-1} \cos(x-(n-1)\pi) + (b_{n-1} + (-1)^{n-1}) \sin(x-(n-1)\pi)$ 이므로,

$g(n\pi) = 2^n a_n = -2^{n-1} a_{n-1}$ 이 된다. 따라서, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right) a_{n-1}$ 이 성립한다.

반면, 조건 $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)dx = -2$ 로부터 $\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)dx = 4$ 를 얻게 되고

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)dx &= \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (4a_2 \cos(x-2\pi) + (b_2+1) \sin(x-2\pi))dx \\ &= [4a_2 \sin(x-2\pi) - 3\cos(x-2\pi)]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \\ &= 4a_2 + 3\end{aligned}$$

이 되어, $a_2 = \frac{1}{4}$ 가 된다. 이로부터 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 을 얻게 된다.

반면, 조건 $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)dx = -2$ 로부터 $\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)dx = 4$ 를 얻게 되고

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} g(x)dx &= \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (4a_2 \cos(x-2\pi) + (b_2+1) \sin(x-2\pi))dx \\ &= [4a_2 \sin(x-2\pi) - 3\cos(x-2\pi)]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \\ &= 4a_2 + 3\end{aligned}$$

이 되어, $a_2 = \frac{1}{4}$ 가 된다. 이로부터 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 을 얻게 된다.

정적분 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x)dx$ 의 값은 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x)dx - \int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} g(x)dx$ 이다.

여기서 $\int_{\pi}^{100\pi} g(x)dx = -6$ 이고,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} g(x)dx &= \int_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} (2^{99} a_{99} \cos(x-99\pi) + (b_{99}-1) \sin(x-99\pi))dx \\ &= [2^{99} a_{99} \sin(x-99\pi) - (b_{99}-1) \cos(x-99\pi)]_{\frac{199\pi}{2}}^{100\pi} \\ &= -2^{99} a_{99} + (b_{99}-1) = 1-3 = -2\end{aligned}$$

가 된다. 따라서 $\int_{\pi}^{\frac{199\pi}{2}} g(x)dx = -4$ 이다.

[38]

(1-1) 점 Q 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 두면, 이 점에서의 접선의 방정식은 $x_1 x - 2y_1 y = -1$

과 같게 되고, 접선의 기울기 m_1 은 $m_1 = \frac{x_1}{2y_1} = \frac{x_1}{\sqrt{2(x_1^2+1)}}$ 이 되어 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < m_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 을

만족하게 된다. 또한 위의 기울기에 대한 식으로부터 $m_1 = \frac{1}{3}$ 이 되는 점의 좌표는 $\left(\sqrt{\frac{2}{7}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ 이 된다. 마찬가지로, 점 R 의 좌표를 (x_2, y_2) 라고 두면, 이 점에서의 접선의 방정식은 $x_2x - 2y_2y = -1$ 과 같게 되고. 접선의 기울기 m_2 는 $m_2 = \frac{x_2}{2y_2} = -\frac{x_2}{\sqrt{2(x_2^2 + 1)}}$ 이 되어 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < m_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 만족하게 된다. 또한 위의 기울기에 대한 식으로부터 $m_2 = \frac{1}{3}$ 이 되는 점의 좌표는 $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ 이 된다.

(1-2) 점 $\left(a, \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}}\right)$ 에서의 접선 $ax - 2\sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}}y = -1$ 이 $(3n, n)$ 을 지나므로, $3na - 2\sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}}n = -1$ 이 성립한다. 이 식으로부터 $7n^2a^2 + 6na + (1 - 2n^2) = 0$ 을 얻는다. 따라서 a 는 이차방정식 $7n^2x^2 + 6nx + (1 - 2n^2) = 0$ 의 한 근이 된다. 같은 방법으로 b 역시 같은 이차방정식의 근이 되고 $a > b$ 이므로, 근의 공식을 적용하면, $a = \frac{-3 + \sqrt{2(1 + 7n^2)}}{7n}$ 이 되고, $b = \frac{-3 - \sqrt{2(1 + 7n^2)}}{7n}$ 이 된다.

(1-3) 두 접선이 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선 위에 놓여있는 점들 중 1사분면에서 만나야 하므로, $\left(a, \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 보다 작아야 하고, 따라서 $a < \sqrt{\frac{2}{7}}$ 이어야 한다. 한편, $n = 1$ 에 대응하는 a 의 값은 (1-2)의 답으로부터 $\frac{1}{7}$ 이 된다. 따라서 $\frac{1}{7} \leq a < \sqrt{\frac{2}{7}}$ 이 되어, k 의 최댓값 $= \frac{1}{7}$, l 의 최솟값 $= \sqrt{\frac{2}{7}}$ 이 된다.

(1-4) 선분 OP_n 의 길이는 $\sqrt{10}n$ 이고, 점 Q_n 에서 직선 $x - 3y = 0$ 까지 이르는 거리는
$$\frac{\left|a - 3\sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{\left|a - 3\frac{(3na + 1)}{2n}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{7}{2}a + \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{7}{2}\left(\frac{-3 + \sqrt{2 + 14n^2}}{7n}\right) + \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}} \\ = \frac{\sqrt{2 + 14n^2}}{2\sqrt{10}n}$$

이므로, 삼각형 Q_nOP_n 의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}n \cdot \frac{\sqrt{2 + 14n^2}}{2\sqrt{10}n} = \frac{\sqrt{2 + 14n^2}}{4}$ 이 된다.

비슷한 방법으로, 점 R_n 에서 직선 $x - 3y = 0$ 까지 이르는 거리는

$$\frac{\left| b + 3\sqrt{\frac{b^2+1}{2}} \right|}{\sqrt{10}} = \frac{b - 3\frac{(3nb+1)}{2n}}{\sqrt{10}} = \frac{-\frac{7}{2}b - \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}} = \frac{\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{-3 - \sqrt{2+14n^2}}{7n}\right) - \frac{3}{2n}}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2\sqrt{10}n}$$

이므로, 삼각형 R_nOP_n 의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}n \cdot \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2\sqrt{10}n} = \frac{\sqrt{2+14n^2}}{4}$ 이 된다.

따라서 $A_n = \frac{\sqrt{2+14n^2}}{2}$ 이 되므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ 가 된다.

[39]

(2-1)

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 (f(nx) - f(nx-1))dx = \int_0^1 f(nx)dx - \int_0^{1/n} f(nx-1)dx - \int_{1/n}^1 f(nx-1)dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{nx} dx + \int_0^{1/n} \sqrt{1-nx} dx - \int_{1/n}^1 \sqrt{nx-1} dx \\ &= \left[\frac{2}{3n} (nx)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3n} (1-nx)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{1/n} - \left[\frac{2}{3n} (nx-1)^{\frac{3}{2}} \right]_{1/n}^1 \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{n} - \frac{2}{3n} (n-1) \sqrt{n-1} + \frac{2}{3n} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_n \sqrt{n^r} &= \left(\frac{2}{3} \frac{n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n-1} + 1}{n} \right) \sqrt{n^r} = \frac{2}{3} \left(\sqrt{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{n^r} \\ &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{n^r} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} + \frac{1}{n} \sqrt{n-1} + \frac{1}{n} \right) \sqrt{n^r} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{n^r}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^{2-r}}} + \frac{1}{\sqrt{n^{2-r}}} \right) \end{aligned}$$

이므로 $r=1$ 인 경우에 수렴하게 되고, 그때 극한값은 1이 된다.

(2-2) $x > 2n$ 인 경우, $g(x) = \sqrt{x-2n} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}$ 이므로,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2n}} - \frac{1}{2\sqrt{x-n}} > 0 \text{이 되어, 이 구간에서 함수 } g(x) \text{는 증가하게 된다.}$$

$\frac{3n}{2} < x < 2n$ 인 경우, $g(x) = -\sqrt{2n-x} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}$ 이므로,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-n}} > 0 \text{이 되어, 이 구간에서 함수 } g(x) \text{는 증가하게 된다.}$$

$n < x < \frac{3n}{2}$ 인 경우, $g(x) = -\sqrt{2n-x} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}$ 이므로,

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-n}} < 0$ 이 되어, 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 감소하게 된다.

$x < n$ 인 경우, $g(x) = -\sqrt{2n-x} + \sqrt{n-x} + \sqrt{n}$ 이므로,

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2n-x}} - \frac{1}{2\sqrt{n-x}} < 0$ 이 되어, 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 감소하게 된다.

또한, $\lim_{x \rightarrow 2n} g'(x) = \infty$ 이고 $\lim_{x \rightarrow n} g'(x) = -\infty$, $g'\left(\frac{3n}{2}\right) = 0$ 이므로, 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	n	...	$\frac{3n}{2}$	...	$2n$	...
$g'(x)$	-		-	0	+		+
$g(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(1-\sqrt{2})\sqrt{n}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x < \frac{3n}{2}$ 일 때 감소하고, $x > \frac{3n}{2}$ 일 때 증가하게 되므로 $x = \frac{3n}{2}$ 일 때, 최솟값 $g(3n/2) = -\sqrt{2n} + \sqrt{n}$ 을 갖게 된다.

$$(2-3) \quad b_n = - \int_n^{2n} g(x) dx = - \int_n^{2n} (-\sqrt{2n-x} - \sqrt{x-n} + \sqrt{n}) dx$$

$$= - \left[\frac{2}{3}(2n-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x-n)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{n}x \right]_n^{2n} = \frac{4}{3}n^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}n^{\frac{3}{2}}$$

이므로, $s \geq \frac{3}{2}$ 일 때, 수열 $\left\{ \frac{b_n}{n^s} \right\}$ 는 수렴하게 된다. $s = \frac{3}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^s} = \frac{1}{3}$ 이 되고,

$s > \frac{3}{2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^s} = 0$ 이 된다.

[40]

(1) <제시문 1>에 의하여

$$L_1 : \left(\frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{1+2}, 0 \right) = (-1, 0) \quad R_1 : \left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, 0 \right) = (1, 0)$$

따라서 타원 E_0 의 방정식은

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3^2 - 1^2} = 1 \text{ 이다. } \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1,$$

<제시문 1>에 의하여

$$L_2 : \left(\frac{1 \times 1 + 2 \times (-1)}{1+2}, 0 \right) = \left(-\frac{1}{3}, 0 \right) \quad R_2 : \left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-1)}{2+1}, 0 \right) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$$

따라서 타원 E_1 의 방정식은

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \text{ 이다. 즉 } \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{8}{9}} = 1$$

<제시문 1>에 의하여

$$L_3 : \left(\frac{1 \times \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)}{1+2}, 0 \right) = \left(-\frac{1}{9}, 0 \right) \quad R_3 : \left(\frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right) + 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right)}{2+1}, 0 \right) = \left(\frac{1}{9}, 0 \right)$$

따라서 타원 E_2 의 방정식은

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^2} = 1 \text{ 이다. 즉, } \frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{8}{81}} = 1$$

<제시문 1>에 의하여

$$L_4 : \left(\frac{1 \times \left(\frac{1}{9}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right)}{1+2}, 0 \right) = \left(-\frac{1}{27}, 0 \right) \quad R_4 : \left(\frac{2 \times \left(\frac{1}{9}\right) + 1 \times \left(-\frac{1}{9}\right)}{2+1}, 0 \right) = \left(\frac{1}{27}, 0 \right)$$

따라서 타원 E_3 의 방정식은

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{27}\right)^2} = 1 \text{ 이다. 즉 } \frac{x^2}{\frac{1}{81}} + \frac{y^2}{\frac{729}{729}} = 1$$

(2) 타원 E_n 의 방정식을

$$\frac{x^2}{(a_n)^2} + \frac{y^2}{(b_n)^2} = 1 \quad (1)$$

이라 하자. 그러면 (1)의 결과로부터

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \sqrt{a_n^2 - \left(\frac{1}{3}a_n\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$a_nb_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \quad (2)$$

한편 (1)로부터 타원 E_n 위의 점 (x, y) 가 1사분면 위에 있을 때 $y = b_n \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_n}\right)^2}$ 가 되

므로, <제시문 3>를 이용하면 타원 E_n 의 1사분면 내부의 넓이는 $b_n \int_0^{a_n} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_n}\right)^2} dx$ 가

됨을 알 수 있다. 따라서

$$S_n = 4b_n \int_0^{a_n} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_n}\right)^2} dx \text{ 이다.}$$

$\frac{x}{a_n} = \sin \theta$ 로 놓으면 S_n 은 다음과 같다.

$$S_n = 4b_n \int_0^{a_n} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_n}\right)^2} dx = 4a_nb_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 4a_nb_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \pi a_nb_n \quad (3)$$

따라서 (2), (3)으로부터

$$S_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \pi$$

를 얻는다. 따라서

$$S_0 = 6\sqrt{2}\pi, \quad S_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi, \quad S_2 = \frac{2\sqrt{2}}{27}\pi, \quad S_3 = \frac{2\sqrt{2}}{243}\pi$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \pi = \frac{6\sqrt{2}}{1-\frac{1}{9}} \pi = \frac{27\sqrt{2}}{4} \pi$$

[41]

(1) 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면

$$l: y = m(x-1)$$

이를 원 C 의 방정식 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하고 정리하면

$$(m^2+1)x^2 - 2m^2x + m^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

을 얻는다.

(1)의 두 근을 a, b 라 하면 일반성을 잃지 않고 $P_1(a, \sqrt{4-a^2}) P_2(b, -\sqrt{4-b^2})$ 라 쓸 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} \overline{PP_1}^2 \times \overline{PP_2}^2 &= \{(a-1)^2 + 4 - a^2\} \{(b-1)^2 + 4 - b^2\} \\ &= (5-2a)(5-2b) \\ &= 25 - 10(a+b) + 4ab \end{aligned}$$

그런데 (1)과 근과 계수의 관계로부터

$$a+b = \frac{2m^2}{m^2+1}, \quad ab = \frac{m^2-4}{m^2+1} \quad (2)$$

이므로

$$\overline{PP_1}^2 \times \overline{PP_2}^2 = 25 - 10 \frac{2m^2}{m^2+1} + 4 \frac{m^2-4}{m^2+1} = 9$$

따라서

$$\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} = 3$$

(2) $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} = 3$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계로부터

$$\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 \geq 2\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} = 6 \text{을 얻는다.}$$

따라서 $\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2$ 의 최솟값은 6이다. (단, 등호는 $\overline{PP_1} = \overline{PP_2} = \sqrt{3}$ 일 때 성립한다.)

이때 $a = b = 1$ 이고 l 이 x 축에 수직일 때이다.

(3) 근과 계수의 관계 (2)로부터

$$\begin{aligned}\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 &= (a-1)^2 + 4 - a^2 + (b-1)^2 + 4 - b^2 \\ &= 10 - 2(a+b) \\ &= \frac{6m^2 + 10}{m^2 + 1} \\ &= 6 + \frac{4}{m^2 + 1}\end{aligned}$$

$X = m^2$ 라 두면 $\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 = 6 + \frac{4}{X+1}$ 이 되고 이는 $X \geq 0$ 에서 정의된 감소 함수이므로, $X = m = 0$ 에서 최댓값 10을 가진다.

[42]

[수학 1-1]

점 C 를 $C\left(a, \frac{a^2}{4p}\right)$ 라 두면 E 의 좌표는 $\left(0, \frac{a^2}{4p}\right)$ 가 된다.

한편, $y' = \frac{x}{2p}$ 이므로 C 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{2p}{a}(x-a) + \frac{a^2}{4p} = -\frac{2p}{a}x + 2p + \frac{a^2}{4p}$$

이고, 따라서 D 의 좌표는 $\left(0, 2p + \frac{a^2}{4p}\right)$ 이다.

따라서 선분 DE 의 길이는

$$\left|2p + \frac{a^2}{4p} - \frac{a^2}{4p}\right| = 2|p|$$

이다. 이는 포물선의 초점 $(0, p)$ 와 준선 $y = -p$ 의 거리 $|p - (-p)| = 2|p|$ 와 일치한다.

[수학 1-2]

$$x^2 = \frac{1}{n}y = 4\left(\frac{1}{4n}\right)y$$

이므로 [수학 1-1]의 결과를 사용하면 $a_n = 2\left(\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2n}$ 임을 알 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

[수학 1-3]

접선에 수직인 직선을 l_a 라 하면

$$l_a : y = -\frac{2p}{a}(x-a) + \frac{a^2}{4p} = -\frac{2p}{a}x + 2p + \frac{a^2}{4p}$$

따라서

$$h(a) = \frac{2p + \frac{a^2}{4p}}{\frac{2p}{a}} = a + \frac{a^3}{8p^2}$$

한편 직선 l_a 와 포물선을 연립하면

$$\frac{x^2}{4p} = -\frac{2p}{a}x + 2p + \frac{a^2}{4p}$$

즉

$$x^2 + \frac{8p^2}{a}x - 8p^2 - a^2 = 0$$

인수분해 하면

$$(x-a)\left(x + \frac{8p^2 + a^2}{a}\right) = 0$$

이로부터 일반성을 잃지 않고

$$f(a) = \frac{1}{4p}\left(\frac{8p^2 + a^2}{a}\right)^2, \quad g(a) = \frac{a^2}{4p}$$

라 둘 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)g(a)}{ah(a)} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{16p^2}(a^4 + 16p^2a^2 + 64p^4)}{\left(a^2 + \frac{a^4}{8p^2}\right)} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{16p^2}\left(1 + \frac{16p^2}{a^2} + \frac{64p^4}{a^4}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{8p^2}\right)} = \frac{\frac{1}{16p^2}}{\frac{1}{8p^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[43]

[수학 2-1] $\alpha - \beta = \alpha - \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 이므로 함수 $f(\alpha) = \alpha - \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 로 정의하고, $f(\alpha)$ 의 미분

을 계산하면 $f'(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 4\alpha + 1}{2(\alpha+1)^2}$ 이 된다. 이로부터 다음과 같은 표를 얻는다.

x	...	$-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$	...	-1	...	$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	정의되지 않음	-	0	+
$f(x)$	↗	$-2 - \sqrt{2}$	↘	정의되지 않음	↘	$-2 + \sqrt{2}$	↗

따라서 $\alpha < -1$ 일 때, 최댓값 $f\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 - \sqrt{2}$ 를 얻고, $\alpha > -1$ 일 때, 최솟값 $f\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 + \sqrt{2}$ 를 얻는다.

별해 : $\beta = \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 로부터 $2(\alpha+1)(\beta-1) = -1$ 을 얻고, $(\alpha+1)(1-\beta) = \frac{1}{2}$ 가 성립한다. 따라서 $\alpha > -1$ 이면, $\beta < 1$ 이 되고, 산술-기하평균의 관계로부터 다음 부등식을 얻는다.

$\alpha - \beta = (\alpha+1) + (1-\beta) - 2 \geq 2\sqrt{(\alpha+1)(1-\beta)} - 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{2} - 2$. 그러므로 α 가 -1 보다 큰 경우에 $\alpha - \beta$ 의 최솟값은 $\sqrt{2} - 2$ 가 된다. $\alpha < -1$ 이면, $\beta > 1$ 이 되고, 산술-기하평균의 관계로부터 다음 부등식을 얻는다.

$-(\alpha - \beta) = (-\alpha - 1) + (\beta - 1) + 2 \geq 2\sqrt{(-\alpha - 1)(\beta - 1)} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} + 2 = \sqrt{2} + 2$ 그러므로 α 가 -1 보다 작은 경우에 $\alpha - \beta$ 의 최댓값은 $-\sqrt{2} - 2$ 가 된다.

답: α 가 -1 보다 큰 경우에 $\alpha - \beta$ 의 최솟값은 $\sqrt{2} - 2$

α 가 -1 보다 작은 경우에 $\alpha - \beta$ 의 최댓값은 $-\sqrt{2} - 2$

[수학 2-2] $\beta = \frac{2\alpha+1}{2\alpha+2}$ 로부터 $2\alpha\beta + 2\beta = 2\alpha + 1$ 을 얻고, 양변에 $\alpha^2 + \beta^2$ 을 더하면, $2\alpha\beta + 2\beta + \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + 1 + \alpha^2 + \beta^2$ 이 된다. 이제 좌변에 $\alpha^2 + \beta^2$ 을 남겨놓고, 나머지 항들을 우변으로 이항하면, $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + 1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 2\beta = (\alpha - \beta + 1)^2$ 이 된다.

따라서 $(\alpha - \beta + 1)^2 = \alpha^2 + \beta^2 = r^2$ 이 항상 성립한다. [1]번의 풀이에서 α 가 -1 보다 작은 경우에 $\alpha - \beta$ 의 최댓값은 $-\sqrt{2} - 2$ 이므로, $\alpha - \beta + 1$ 의 최댓값은 $-\sqrt{2} - 1$ 이 되어 $\alpha - \beta + 1$ 은 항상 음수가 된다. 따라서 α 가 -1 보다 작은 경우에 $\alpha - \beta + 1 = -r$ 이 된다. 그러므로 $\alpha - \beta = -r - 1$ 과 같다.

답: $\alpha - \beta = -r - 1$

[★별해]

$P(\alpha, \beta)$ 를 x 축으로 $+1$ y 축으로 -1 만큼 평행이동한 점을 $P'(a, b)$ 이라 하면

$P'(a, b)$ 은 $y = -\frac{1}{2x}$ 위의 점이므로 $b = -\frac{1}{2a}$ 이다.

$a = \alpha + 1$, $b = \beta - 1$ 이므로 $\alpha - \beta = a - b - 2 = a + \frac{1}{2a} - 2$ 이다.

원점을 x 축으로 $+1$ y 축으로 -1 만큼 평행이동한 점을 $(1, -1)$ 이다.

$P(\alpha, \beta)$ 로부터 원점까지 이르는 거리를 r 은 평행이동 해도 변하지 않으므로 (a, b) 와

$(1, -1)$ 사이의 거리도 r 이다.

$$\begin{aligned} r^2 &= (a-1)^2 + (b+1)^2 \\ &= (a-1)^2 + \left(-\frac{1}{2a}+1\right)^2 \\ &= a^2 - 2a + 1 + \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{a} + 1 \\ &= \left(a^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 + 1\right) + 2\left(-a - \frac{1}{a} + 1\right) \\ &= \left(-a - \frac{1}{a} + 1\right)^2 \end{aligned}$$

$a < 0$ 이므로 $r = -a - \frac{1}{a} + 1$ 이다.

따라서 $\alpha - \beta = a - b - 2 = a + \frac{1}{2a} - 2 = -r - 1$

[수학 2-3] [2]번의 결과로부터 $\alpha - \beta = -r - 1$ 이므로, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\overline{PQ}^2 = (\alpha + 2)^2 + (\beta - 2)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 4(\alpha - \beta) + 8 = r^2 + 4(-r - 1) + 8 = (r - 2)^2$$

[1]번의 결과로부터 $-r - 1 = \alpha - \beta \leq -\sqrt{2} - 2$ 이므로, $r - 2 \geq \sqrt{2} - 1 > 0$ 이므로, 위의 식에서 $\overline{PQ} = r - 2$ 가 된다.

답: $\overline{PQ} = r - 2$

[수학 2-4] [2]번의 결과로부터 $\alpha - \beta = -r - 1$ 이고, $\beta = \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 2}$ 이므로,

$$\alpha - \frac{2\alpha + 1}{2\alpha + 2} = -r - 1 \text{ 이 되어 양변에 } 2\alpha + 2 \text{ 를 곱해주고 정리하면,}$$

$$2\alpha^2 + (2r + 2)\alpha + (2r + 1) = 0 \text{ 이 된다. 따라서 } b_1 = 2r + 2, b_0 = 2r + 1 \text{ 이 됨을 알 수 있다.}$$

답: $b_1 = 2r + 2, b_0 = 2r + 1$

[44]

[수학 1-1] 원 C 의 중심과 포물선 P 위의 점 $B(x, x^2)$ 사이의 거리의 제곱을 $f(x)$ 라고 하면, 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = (x - 12)^2 + \left(x^2 - \frac{15}{2}\right)^2 = x^4 - 14x^2 - 24x + \frac{801}{4}$$

원 C 의 중심과 점 B 사이의 거리가 항상 원 C 의 반지름보다 큼을 보이기 위해서, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 원 C 의 반지름의 제곱보다 큼을 보이면 된다. 이에 함수 $f(x)$ 의 도함수를 이용하여 아래와 같이 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타낸다.

$$f'(x) = 4x^3 - 28x - 24 = 4(x + 2)(x + 1)(x - 3) \text{ 이므로 } f'(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

x	$\dots$	-2	$\dots$	-1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{833}{4}$	$\nearrow$	$\frac{845}{4}$	$\searrow$	$\frac{333}{4}$	$\nearrow$

그러므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $\frac{333}{4}$ 이다. 따라서, 원 C 의 중심과 점 B 사이의 거리의 최솟값

$$\sqrt{\frac{333}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{37}$$

은 원의 반지름 6보다 크다.

[수학 1-2] 원 C 밖에 있는 포물선 P 위의 점 B 가 주어지면, 점 B 와 원 위의 임의의 점 A 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 점 A 는 점 B 와 점 C 의 중심을 지나는 직선 위에 있고, 그 거리는 점 B 와 원 C 의 중심 사이의 거리에서 원 C 의 반지름을 뺀 것과 같다. 따라서, 임의의 두 점 A, B 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 점 A 와 점 B 는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 포물선 P 위의 점 중에서 원 C 의 중심과의 거리가 최소인 점이 구하고자 하는 점 B 가 된다. 이 점 B 와 원 C 의 중심을 지나는 직선을 l 이라고 하면, 직선 l 과 원 C 의 두 교점 중 점 B 에 가까운 점이 구하고자 하는 점 A 가 된다. 앞의 [수학 1-2]로부터 점 $B(x, x^2)$ 와 원 C 의 중심 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 점 B 는 $(3, 9)$ 이다. 그리고 점 $B(3, 9)$ 과 원 C 의 중심 $\left(12, \frac{15}{2}\right)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{2}$$

이다. 또한 직선 l 과 원 $C: (x-12)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = 36$ 의 두 교점

$$\left(12 + \frac{36}{\sqrt{37}}, \frac{15}{2} - \frac{6}{\sqrt{37}}\right) \text{ 또는 } \left(12 - \frac{36}{\sqrt{37}}, \frac{15}{2} + \frac{6}{\sqrt{37}}\right)$$

중 점 $B(3, 9)$ 에 가까운 점은 $\left(12 - \frac{36}{\sqrt{37}}, \frac{15}{2} + \frac{6}{\sqrt{37}}\right)$ 이다.

즉, 구하고자 하는 점 A 는 $\left(12 - \frac{36}{\sqrt{37}}, \frac{15}{2} + \frac{6}{\sqrt{37}}\right)$ 이고, 점 B 는 $(3, 9)$ 이다.

[수학 1-3] 점 $B(3, 9)$ 에서 원 $C: (x-12)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = 36$ 에 그은 접선은 점 $B(3, 9)$ 를 지나므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y = m(x-3) + 9 \text{ 또는 } x = 3$$

직선의 방정식 $y = m(x-3) + 9$ 를 원 C 의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식

$$(m^2 + 1)x^2 - 3(2m^2 - m + 8)x + \left(9m^2 - 9m + \frac{441}{4}\right) = 0$$

의 판별식을 D 라 하면, $D = -9(20m^2 + 12m - 15) = 0$ 에서

$$m = \frac{1}{10}(-3 \pm 2\sqrt{21})$$

한편 직선 $x=3$ 과 원 C 는 만나지 않는다. 그러므로 구하고자 하는 두 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{10}(-3 \pm 2\sqrt{21})(x-3)+9$$

[수학 1-4] 두 접선의 방정식이 이루는 각의 크기를 θ 라고 하며, $\sin \frac{\theta}{2}$ 의 값은 원 C 의 반지름 $r=6$ 을 점 $B(3,9)$ 에서 원 C 의 중심 O' 사이의 거리 $r' = \overline{BO'} = \sqrt{\frac{333}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{37}$ 으로 나눈 값이다. 즉,

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{r'} = \frac{4}{\sqrt{37}}$$

따라서 $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{21}{37}}$ 이고, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{8}{37} \sqrt{21}$$

[45]

[수학 2-1] 문제의 조건으로부터

$$f(a) = \int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) dx = (\ln a - 1) - \left(\ln 1 - \frac{1}{a} \right) = \ln a + \frac{1}{a} - 1$$

$$g(a) = (a-1) \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$$

따라서

$$h(a) = \ln a + \frac{2}{a} - 2$$

[수학 2-2]

$$h'(a) = \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} = \frac{a-2}{a^2}, \quad h''(a) = -\frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^3}$$

에서 $h'(2) = 0$ 이고, $h''(2) = \frac{1}{4} > 0$ 이므로

$h(a)$ 의 최솟값은 $h(2) = \ln 2 - 1$ 이다.

[수학 2-3]

$$\frac{h(a)}{a-1} = \frac{\ln a}{a-1} - \frac{2}{a} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 1} \frac{h(a)}{a-1} &= \lim_{a \rightarrow 1} \left(\frac{\ln a}{a-1} - \frac{2}{a} \right) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\ln a}{a-1} - 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - 2 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 2$$

따라서 <제시문2>에 의하여

$$\lim_{a \rightarrow 1} \frac{h(a)}{a-1} = \ln e - 2 = -1$$

임을 알 수 있다.

[수학 2-4]

$$k(a) = 2\sqrt{a} - h(a) = 2\sqrt{a} - \ln a - \frac{2}{a} + 2$$

라 두자. $a > 1$ 이므로

$$k'(a) = \frac{a^{3/2} - a + 2}{a^2} = \frac{a(\sqrt{a}-1)+2}{a^2} > 0$$

그런데 $k(1) = 2 > 0$ 이므로 $k(a) = 2\sqrt{a} - h(a) > 0$ 이다.

따라서 $h(a) < 2\sqrt{a}$

[별해]

$k(a) = 2\sqrt{a} - \ln a$ 라 두면 $a > 1$ 에서

$$k'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{a}-1}{a} > 0 \text{ 이다. 그런데}$$

$k(1) = 2 > 0$ 이므로 $k(a) = 2\sqrt{a} - \ln a > 0$ 이다.

그런데 $a > 1$ 에서 $\frac{a-1}{a} > 0$ 이므로

$$2\sqrt{a} - h(a) = 2\sqrt{a} - \ln a + \frac{2(a-1)}{a} > 2\sqrt{a} - \ln a > 0$$

이다.

[수학 2-5] [수학 1-2]와 [수학 1-4]의 결과로부터

$\ln 2 - 1 \leq h(a) < 2\sqrt{a}$ 임을 알 수 있다.

$$\text{양변을 } a \text{ 로 나누면 } \frac{\ln 2 - 1}{a} \leq \frac{h(a)}{a} < \frac{2}{\sqrt{a}}$$

$$\text{그런데 } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln 2 - 1}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{a}} = 0$$

이므로 <제시문3>에 의해 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{h(a)}{a} = 0$ 를 얻는다.

[46]

[수학 1-1]

도형 D 의 넓이 S_D 는

$$S_D = \int_0^2 (-x^2 + 4)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

점 $A(a, 0)$ 와 $B(0, b)$ 를 지나고 도형 D 의 넓이를 이등분하는 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{단}, 0 < a \leq 2, 0 < b \leq 4)$$

이고, 여기서 a 와 b 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$ab = \frac{16}{3} \quad \dots\dots (1)$$

왜냐하면, 직선 l 이 도형 D 의 넓이 S_D 를 이등분한다는 조건으로부터 직선 l 및 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{2}S_D$ 와 같아야 하기 때문이다. 즉, $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}S_D$ 이다.

(참고로, 점 A 와 B 가 같은 경우를 고려하면 원점 O 를 지나고 도형 D 의 넓이를 이등분하는 직선이 원점과의 거리가 0으로 가장 가까운 직선이 되지만, [수학 1-2]에서 구하고자 하는 점 C_1 이 원점 O 와 같아지기 때문에 삼각형 OC_1C_2 를 정의할 수 없다. 따라서 점 A 와 B 는 서로 다른 두 점으로 이해되어야 한다.)

그러므로, 직선 l 의 방정식은 $bx + ay = \frac{16}{3}$ 이고, 두 부등식 $0 < a \leq 2, 0 < b \leq 4$ 로부터 아래와 같이 a 의 범위를 얻을 수 있다.

$$\frac{4}{3} \leq a \leq 2$$

원점 O 와 직선 $l: bx + ay + \left(-\frac{16}{3}\right) = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left| -\frac{16}{3} \right|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{16}{3} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

이므로 원점과 직선 l 사이의 거리가 최소가 되기 위해서는 $a^2 + b^2$ 의 값이 최대, 반대로 거리가 최대가 되기 위해서는 $a^2 + b^2$ 의 값이 최소가 되어야 한다. 따라서, a 와 b 가 만족하는 관계식 (1)을 이용하여 $a^2 + b^2$ 을 a 에 대한 함수 $f(a)$

$$f(a) = a^2 + \left(\frac{16}{3a}\right)^2$$

으로 나타내고, 닫힌구간 $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$ 에서 함수 $f(a)$ 의 최대, 최소를 이해하여야 한다. 이에 함수 $f(a)$ 의 도함수를 활용하여 $f(a)$ 의 증가와 감소를 아래와 같이 표로 나타낸다.

$$f'(a) = 2a - \frac{512}{9a^3} = 2a \left(1 - \frac{16}{3a^2}\right) \left(1 + \frac{16}{3a^2}\right) \text{이므로 } f'(a) = 0 \text{에서 } a = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

a	$\frac{4}{3}$	$\dots$	2
$f'(a)$	—	—	—
$f(a)$	$\frac{160}{9}$	$\searrow$	$\frac{100}{9}$

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{4}{3}$ 일 때 최댓값을, $a = 2$ 일 때 최솟값을 가진다. 즉, 원점과 직선 $l: bx + ay = \frac{16}{3}$ 사이의 거리는 $(a, b) = \left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 일 때 최솟값을, $(a, b) = \left(2, \frac{8}{3}\right)$ 일 때 최댓값을 가진다. 그러므로 직선 l_1 과 직선 l_2 의 방정식은 다음과 같다.

$$l_1: 3x + y = 4, l_2: 4x + 3y = 8$$

[수학 1-2] 점 C_1 은 직선 l_1 위의 점 중에서 원점과의 거리가 최소인 점이므로, 점 C_1 은 원점을 지나고 직선 l_1 에 수직인 직선과 l_1 과의 교점이다. 이 때 원점을 지나고 직선 $l_1: y = -3x + 4$ 에 수직인 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{3}x$ 이므로, 직선 l_1 과의 교점을 구하면 점 C_1 은 다음과 같다.

$$C_1\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

위와 같은 방법으로 점 C_2 는 원점을 지나고 직선 l_2 에 수직인 직선과 직선 l_2 와의 교점이다. 원점을 지나고 직선 $l_2: y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ 에 수직인 직선의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x$ 이므로, 직선 l_2 와의 교점을 구하면 점 C_2 은 다음과 같다.

$$C_2\left(\frac{32}{25}, \frac{24}{25}\right)$$

점 C_1 과 직선 $y = \frac{3}{4}x$ 사이의 거리를 h 라고 하고 선분 OC_2 의 길이를 d 라고 하면, 삼각형 OC_1C_2 의 넓이 S_{Δ} 는 다음과 같다.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}dh$$

이때 점 $C_1\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 와 직선 $3x - 4y = 0$ 사이의 거리 h 는

$$h = \frac{\left|3\frac{6}{5} - 4\frac{2}{5}\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

선분 OC_2 의 길이 d 는

$$d = \sqrt{\left(\frac{32}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{8}{5}$$

그러므로 삼각형 OC_1C_2 의 넓이는 $\frac{8}{25}$ 이다.

[수학 1-3] 포물선 $y = -x^2 + 4$ 를 x 축 방향으로 m 만큼 y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선 F 의 방정식은 다음과 같다.

$$y - n = -(x - m)^2 + 4$$

포물선 F 가 직선 l_1 에 접한다는 조건으로부터 m, n 이 만족해야 하는 관계식을 얻기 위해서, 직선 l_1 의 방정식 $y = -3x + 4$ 를 포물선의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식

$$x^2 - (2m + 3)x + (m^2 - n) = 0 \quad \dots\dots (A)$$

의 판별식을 D_1 이라 하면,

$$D_1 = 12m + 4n + 9 = 0 \quad \dots\dots (1)$$

같은 방법으로 포물선 F 가 직선 l_2 에 접한다는 조건으로부터 m, n 이 만족해야 하는 관계식을 얻기 위해서, 직선 l_2 의 방정식 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ 을 포물선의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식

$$x^2 - \left(2m + \frac{4}{3}\right)x + \left(m^2 - n - \frac{4}{3}\right) = 0 \quad \dots\dots (B)$$

의 판별식을 D_2 라 하면,

$$D_2 = \frac{4}{9}(12m + 9n + 16) = 0 \quad \dots\dots (2)$$

포물선 F 가 직선 l_1 과 l_2 에 동시에 접하기 위한 m, n 의 값은 1차방정식 (1), (2)를 동시에 만족해야 하므로, 구하고자 하는 상수 m, n 의 값은 다음과 같다.

$$m = -\frac{17}{60}, \quad n = -\frac{7}{5}$$

[수학 1-4] 포물선 F 및 직선 l_1 과 l_2 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_F 라고 하자. 포물선 F 와 직선 l_1 의 접점의 x 좌표의 값을 x_1 라고 하면, x_1 는 [수학 1-3]의 2차방정식 (A)의 중근이므로

$$x_1 = \frac{1}{2}(2m + 3) = \frac{73}{60}$$

같은 방법으로 포물선 F 와 직선 l_2 의 접점의 x 좌표의 값을 x_2 라고 하면, x_2 는 2차방정식 (B)의 중근이므로

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2m + \frac{4}{3}\right) = \frac{23}{60}$$

이 때, 직선 l_1 과 직선 l_2 의 교점의 x 좌표의 값이 $\frac{4}{5}$ 이므로, 구하고자 하는 도형의 넓이 S_F 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_F &= \int_{\frac{23}{60}}^{\frac{4}{5}} \left(x - \frac{23}{60}\right)^2 dx = \int_{\frac{4}{5}}^{\frac{73}{60}} \left(x - \frac{73}{60}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{23}{60}\right)^3 \right]_{\frac{23}{60}}^{\frac{4}{5}} + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{73}{60}\right)^3 \right]_{\frac{73}{60}}^{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{125}{5184} + \frac{125}{5184} = \frac{125}{2592} \end{aligned}$$

[47]

[수학 2-1]

(a) $x \leq 0$: 두 식 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 과 $y = x + 3$ 을 연립하여 풀면, 두 교점 $Q_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 과

$Q_2(0,3)$ 을 얻는다.

(b) $x > 0$: 두 식 $y = \frac{1}{x} + 2$ 와 $y = x + 3$ 을 연립하여 풀면, 교점 $Q_3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ 를 얻는다.

$$\text{답: } Q_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), Q_2(0,3), Q_3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

[수학 2-2]

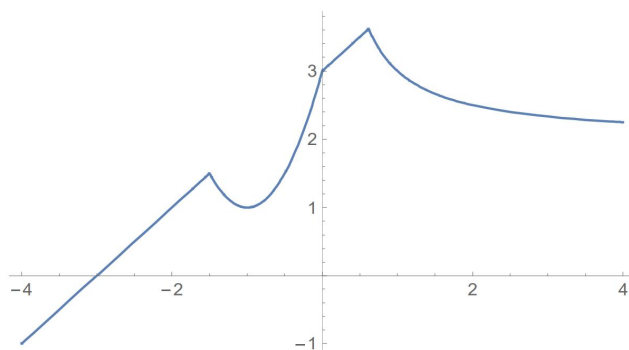
(a) $x \leq 0$: $f(x) < g(x)$ 인 부분을 살펴보면, 부등식 $2x^2 + 4x + 3 < x + 3$ 으로부터 $-\frac{3}{2} < x < 0$ 을 얻는다. 또한 $f(0) = g(0)$ 이다. 따라서 $x \leq 0$ 일 때, 함수 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x) = \begin{cases} x + 3 & \left(x \leq -\frac{3}{2}\right) \\ 2x^2 + 4x + 3 & \left(-\frac{3}{2} < x \leq 0\right) \end{cases}$$

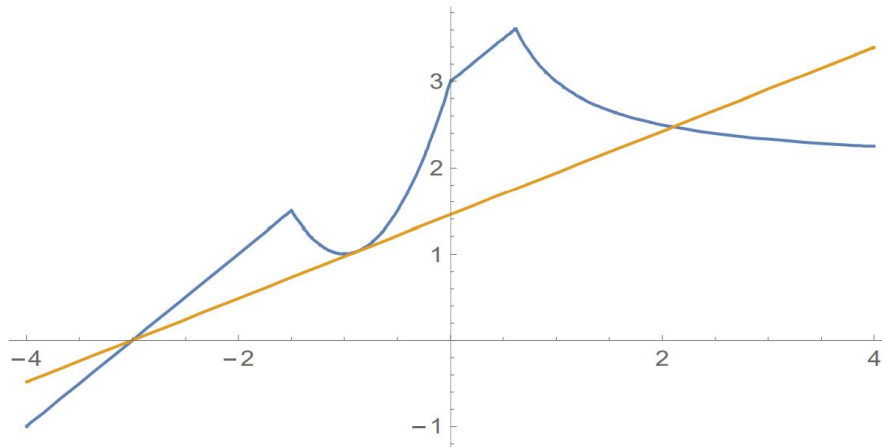
(b) $x > 0$: $f(x) < g(x)$ 인 부분을 살펴보면, 부등식 $\frac{1}{x} + 2 < x + 3$ 로부터 $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 을 얻는다. 따라서 $x > 0$ 일 때, 함수 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x) = \begin{cases} x + 3 & \left(0 < x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \frac{1}{x} + 2 & \left(x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

이로부터 곡선 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



이 곡선 위에 $(-3,0)$ 을 지나고 기울기가 t 인 직선을 그으면, 아래 그림에 있는 것처럼 2사분면에서 곡선과 접할 때, 3개의 교점을 가짐을 알 수 있다.



위 그림에서 접선의 기울기가 t 일 때, 이차방정식 $2x^2 + 4x + 3 = t(x+3)$ 이 중근을 가지므로, 판별식은 0이 되어, $t = -8 + 6\sqrt{2}$ 를 얻는다. 이로부터 아래와 같은 표를 얻는다.

t 의 범위	$k(t)$
$0 < t < -8 + 6\sqrt{2}$	2
$t = -8 + 6\sqrt{2}$	3
$-8 + 6\sqrt{2} < t < 1$	4

[수학 2-3] $P_n(\alpha_n, \beta_n)$ 에서 편의상 $\alpha = \alpha_n, \beta = \beta_n$ 이라고 표기하자. 점 P_n 이 2사분면 위에 놓여있어야 하므로, P_n 은 포물선 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 위에 놓여있어야 한다. 또한 $P_n(\alpha, \beta)$ 의 x -좌표인 α 는 점 Q_1 의 x -좌표인 $-\frac{3}{2}$ 와 점 Q_2 의 x -좌표인 0 사이에 놓여있게 된다. 포물선 $y = 2x^2 + 4x + 3 = 2(x+1)^2 + 1$ 위의 점 $P_n(\alpha, \beta)$ 에서의 접선의 방정식은 $(\alpha+1)(x+1) = \frac{1}{4}(y-1+\beta-1)$ 로 주어지고, 이 직선이 점 $(n, 0)$ 을 지나므로, 식 $(\alpha+1)(n+1) = \frac{1}{4}(\beta-2)$ 를 얻는다. 이제 이 식에 $\beta = 2\alpha^2 + 4\alpha + 3$ 을 대입하고 정리하면, α 는 2차방정식 $2x^2 - 4nx - (4n+3) = 0$ 이 근이 됨을 알 수 있다. 근의 공식과 α 의 범위를 고려하면, $\alpha_n = n - \frac{1}{2}\sqrt{4n^2 + 8n + 6}$ 을 얻고, 식 $(\alpha+1)(n+1) = \frac{1}{4}(\beta-2)$ 로부터 $\beta_n = (4n^2 + 8n + 6) - (2n+2)\sqrt{4n^2 + 8n + 6}$ 을 얻게 된다.

이제 α 와 β 의 극한값에 대하여 논해보자. 편의상 $4n^2 + 8n + 6$ 을 A 로 치환하면, $\alpha = n - \frac{1}{2}\sqrt{A}$ 이고, 분모와 분자에 각각 $n + \frac{1}{2}\sqrt{A}$ 를 곱해서 정리하면, $\alpha = \frac{-2n - \frac{3}{2}}{n + \frac{1}{2}\sqrt{A}}$ 이

된다. 분모와 분자를 각각 n 으로 나누어주면, $\alpha = \frac{-2 - \frac{3}{2n}}{1 + \frac{\sqrt{4n^2 + 8n + 6}}{2n}}$ 이 되어 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -1$

이 됨을 알 수 있다. 비슷한 방법으로 $\beta = A - (2n+2)\sqrt{A}$ 이고, 분모와 분자에 각각

$A + (2n+2)\sqrt{A}$ 를 곱해서 정리하면, $\beta = \frac{2A}{A + (2n+2)\sqrt{A}}$ 이 된다. 분모와 분자를 각각

A 로 나누어주면, $\beta = \frac{2}{1 + \frac{(2n+2)}{\sqrt{A}}}$ 이 되어 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$ 이 됨을 알 수 있다.

$$\text{답: } \alpha_n = n - \frac{1}{2} \sqrt{4n^2 + 8n + 6}, \beta_n = (4n^2 + 8n + 6) - (2n+2) \sqrt{4n^2 + 8n + 6},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$$

[★별해]

$P_n(\alpha_n, \beta_n)$ 에서 편의상 $\alpha = \alpha_n, \beta = \beta_n$ 이라고 표기하자. 점 P_n 이 2사분면 위에 놓여있어야 하므로, P_n 은 포물선 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 위에 놓여있어야 한다. 또한 $P_n(\alpha, \beta)$ 의 x -좌표인 α 는 점 Q_1 의 x -좌표인 $-\frac{3}{2}$ 와 점 Q_2 의 x -좌표인 0 사이에 놓여있게 된다.

$y = 2x^2 + 4x + 3$ 위의 점 $P_n(\alpha, \beta)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = 4(\alpha + 1)(x - \alpha) + 2\alpha^2 + 4\alpha + 3$$

이고 이 직선이 점 $(n, 0)$ 을 지나므로,

$$4(\alpha + 1)n - 2\alpha^2 + 3 = 0$$

을 얻는다. 이때 α 는 2차방정식 $2x^2 - 4nx - (4n+3) = 0$ 이 근이 됨을 알 수 있다. 근의 공식과 α 의 범위를 고려하면,

$$\alpha_n = n - \frac{1}{2} \sqrt{4n^2 + 8n + 6}, \beta_n = (4n^2 + 8n + 6) - (2n+2) \sqrt{4n^2 + 8n + 6}$$

을 얻는다. 이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{2} \sqrt{4n^2 + 8n + 6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n - \frac{3}{2}}{n + \frac{1}{2} \sqrt{4n^2 + 8n + 6}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 - \frac{3}{2n}}{1 + \frac{\sqrt{4n^2 + 8n + 6}}{2n}} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\alpha_n^2 + 4\alpha_n + 3) = 1$$

[수학 2-4]

(3)번의 풀이에서 접선 l_n 의 방정식은 $(\alpha + 1)(x + 1) = \frac{1}{4}(y - 1 + \beta - 1)$ 로 주어지므로, 이 식에 $x = 0$ 을 대입하면, $y = 4\alpha - \beta + 6$ 이 되므로, 점 T_n 의 y -좌표는 $4\alpha - \beta + 6$ 과 같다. 또한 접선 l_n 은 곡선 $y = h(x)$ 와 2사분면에 있는 직선부분과 만나므로, 두 식 $(\alpha + 1)(x + 1) = \frac{1}{4}(y - 1 + \beta - 1)$ 과 $y = x + 3$ 을 연립해서 풀면, $x = \frac{\beta - 4\alpha - 3}{4\alpha + 3}$ 이 되므로, 교점 R_n 의 x -좌표는 $\frac{\beta - 4\alpha - 3}{4\alpha + 3}$ 이 된다.

넓이 $S_n = \Delta Q_2 R_n T_n - \int_{-\frac{3}{2}}^0 ((x+3) - (2x^2 + 4x + 3))dx = \Delta Q_2 R_n T_n - \frac{9}{8}$ 이고, 여기서

$\Delta Q_2 R_n T_n = \frac{1}{2}(3 - t_n)(-r_n)$ 이 된다. 여기서 t_n 은 점 T_n 의 y -좌표이며, r_n 은 점 R_n 의 x -좌표이다. 앞에서 구한 t_n 과 r_n 의 식을 대입해서 정리하면, $S_n = -\frac{1}{2} \frac{(\beta - 4\alpha - 3)^2}{4\alpha + 3} - \frac{9}{8}$ 이 되며, (3)번에서 구한 α 의 극한값과 β 의 극한값을 적용하면, S_n 의 극한값은 $\frac{7}{8}$ 과 같게 된다.

답: (점 T_n 의 y -좌표) $= 4\alpha_n - \beta_n + 6$, (점 R_n 의 x -좌표) $= \frac{\beta_n - 4\alpha_n - 3}{4\alpha_n + 3}$,

$$S_n = -\frac{1}{2} \frac{(\beta - 4\alpha - 3)^2}{4\alpha + 3} - \frac{9}{8}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{7}{8}$$

[★별해]

(3)번의 풀이에서 접선 l_n 의 방정식은 $y = 4(\alpha_n + 1)x - 2\alpha_n^2 + 3$ 이므로

점 T_n 의 y -좌표는 $-2\alpha_n^2 + 3$

l_n 의 방정식을 $y = x + 3$ 와 연립해서 풀면

점 R_n 의 x -좌표는 $\frac{2\alpha_n^2}{4\alpha_n + 3}$

넓이 $S_n = \Delta Q_2 R_n T_n - \int_{-\frac{3}{2}}^0 ((x+3) - (2x^2 + 4x + 3))dx = \Delta Q_2 R_n T_n - \frac{9}{8}$ 이고,

여기서 $\Delta Q_2 R_n T_n = \frac{1}{2}(3 - t_n)(-r_n)$ 이 된다.

여기서 t_n 은 점 T_n 의 y -좌표이며, r_n 은 점 R_n 의 x -좌표이다. 따라서

$$S_n = \frac{1}{2}(3 - (-2\alpha_n^2 + 3))(-\frac{2\alpha_n^2}{4\alpha_n + 3}) - \frac{9}{8} = -\frac{1}{2} \frac{4\alpha_n^4}{4\alpha_n + 3} - \frac{9}{8}$$

이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{7}{8}$ 이다.

[48]

(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이고 함수 $f(x)$ 가 서로 다른 두 개의 극값을 가지므로, $a^2 > 3b$ 이다.

또한, $\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}$, $\alpha\beta = \frac{b}{3}$ 이다. $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{-2}{9}$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= (\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + a(\beta + \alpha) + b \\ &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + a(\alpha + \beta) + b \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{2a}{3}\right)^2 - \frac{b}{3} - \frac{2a^2}{3} + b > -\frac{2}{9}$$

이다. 이를 정리하면, $b > \frac{a^2-1}{3}$ 이다. 즉, $3b+1 > a^2$ 이다.

따라서, $3b+1 > a^2 > 3b$ 를 얻게 되고, 이를 만족하는 정수 a 와 b 는 존재하지 않는다.

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이고 함수 $f(x)$ 가 서로 다른 두 개의 극값을 가지므로, $a^2 > 3b$ 이다. 선분 AB 가 x 축과 만나지 않으므로, $f(\alpha)f(\beta) > 0$ 이 성립한다. 여기서,

$$f(\alpha)f(\beta) = (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha)(\beta^3 + a\beta^2 + b\beta), \alpha + \beta = -\frac{2a}{3}, \alpha\beta = \frac{b}{3}$$

이므로, $f(\alpha)f(\beta) = \frac{b^2(4b-a^2)}{27} > 0$ 이다. 즉, $b > \frac{a^2}{4}$ 이다.

$a^2 > 3b$ 이므로 $\frac{a^2}{4} < b < \frac{a^2}{3}$ 이므로 $-5 \leq a \leq 5, -5 \leq b \leq 5$ 를 만족하는 (a, b) 는 $(-4, 5), (4, 5)$ 이다.

(3) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이고 함수 $f(x)$ 가 서로 다른 두 개의 극값을 가지므로, $a^2 > 3b$ 이고 $\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}, \alpha\beta = \frac{b}{3}$ 이다.

선분 AB 를 삼등분 하는 두 점의 x 좌표는 각각 $\frac{2\alpha+\beta}{3}$ 와 $\frac{\alpha+2\beta}{3}$ 이다.

선분 CD 가 y 축과 만나지 않기 위해서는 두 좌표값의 곱이 양수여야 한다.

$$\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) = \frac{1}{9}(2\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\alpha\beta) = \frac{1}{9}(2(\alpha+\beta)^2 + \alpha\beta) = \frac{1}{9}\left(2\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{b}{3}\right) > 0$$

이고, $b > -\frac{8}{3}a^2$ 이다.

$a^2 > 3b$ 이므로 $-\frac{8}{3}a^2 < b < \frac{a^2}{3}$ 이다. 이를 만족하는 순서쌍 (a, b) 는

$a = 1$ 일 때, $b = 0, -1, -2$

$a = 2$ 일 때, $b = 1, 0, -1, -2, -3$

$a = 3$ 일 때, $b = 2, 1, 0, -1, -2, -3$ 이다.

따라서 가능한 모든 쌍의 개수는 $2 \times (3 + 5 + 6) = 28$ 개다.

[49]

(1) 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프에서 $a \geq 0$ 인 경우와 두 곡선 $f(x) = a|x|$ 와 $y = g(x)$ 가 접할 경우, 두 곡선의 교점이 3개가 된다. 그리고 두 곡선의 교점이 3개보다 많은 경우는 $a < 0$ 와 두 곡선 $f(x) = a|x|$ 와 $y = g(x)$ 가 접할 경우의 a 값 사이가 된다.

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(c, g(c))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = (4c^3 - 2c)(x - c) + (c^4 - c^2)$$

이고, 이 접선은 원점을 지나므로 $0 = -c(4c^3 - 2c) + (c^4 - c^2)$, 즉 $c^2(3c^2 - 1) = 0$ 이다. 이로부터 $c = 0, \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 그 때 접선의 기울기 a 가 $0, -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 이다.

따라서, 두 곡선이 만나는 서로 다른 점의 개수가 3개보다 많기 위한 실수 a 값의 범위는 $-\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < 0$ 이다.

(2) 이 문항에서 함수 $f(x) = 4x^2 - \frac{1}{4}$ 이고, 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $4x + 8y = 1$ 이 만나는 두 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(-\frac{3}{8}, \frac{5}{16}\right)$ 이다. 점 $(c, f(c))$ 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{8c}(x - c) + \left(4c^2 - \frac{1}{4}\right)$$

이고, 이로부터 c 에 대한 삼차함수 $h(c) = 32c^3 - (8y + 1)c - x$ 를 정의하자.

점 $P(x, y)$ 에 대해 삼차방정식 $h(c) = 0$ 은 열린구간 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 에서 해를 가져야 한다.

이때, $h'(c) = 96c^2 - (8y + 1)$ 이다.

만약, $8y + 1 \leq 0$ 이라면 $h(c)$ 는 증가함수이므로, $h(c) = 0$ 이 열린구간 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 에서 해를 갖기 위해선 $h(0) = -x < 0$ 을 만족해야 한다. 그런데 $x < 0$ 이므로, 모순이다.

따라서, $8y + 1 > 0$ 이고 $k = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8y + 1}{6}}$ 에서 $h'(k) = 0$ 을 만족한다.

점 P 의 y 좌표값은 $\frac{5}{16}$ 이하이므로, $0 < k < \frac{1}{4}$ 가 성립한다. 따라서, $c = k$ 에서 함수 $h(c)$ 가 극솟값을 가지고 $h(0) = -x > 0$ 이므로, $h(k) \leq 0$ 이 성립한다.

여기서, $h(k) = 0$ 으로부터 식 $y = p(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{8}$ 을 얻을 수 있고, 문제에서 구하고자 하는 직선의 기울기의 최댓값은 점 P 의 x 좌표 값이 다음의 식을 만족할 때 얻어진다.

$$4x^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{8}$$

여기서, $t = x^{\frac{2}{3}}$ 이라고 치환하면, 삼차방정식

$$32t^3 - 6t - 1 = 0$$

을 얻게 되고, 이는 다시 $(4t + 1)^2(2t - 1) = 0$ 로 분해되고 $t \geq 0$ 이므로, $t = \frac{1}{2}$ 을 얻게 된다.

즉, $x < 0$ 이므로 $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이고 $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서, 문제의 기울기는 $\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{2}}{4}} = -\sqrt{2}$ 이다.

(3) 이 문항에서 함수 $f(x) = a|x|^3 - \frac{1}{2}$ 이다. 점 $(c, g(c))$ 에서 그린 곡선 $y = g(x)$ 의 접선의 방정식은 $y = (4c^3 - 2c)(x - c) + (c^4 - c^2)$ 이고, 이 접선이 점 P 를 지나므로,

$$-2 = -c(4c^3 - 2c) + c^4 - c^2 = -3c^4 + c^2$$

가 성립한다. 이를 정리하면, $(3c^2 + 2)(c^2 - 1) = 0$ 이므로 $c = \pm 1$ 이다. 따라서 두 개의 접점의 좌표는 $(\pm 1, 0)$ 이다. 이 두 점과 점 P 를 동시에 지나는 원의 중심을 $(0, t)$ 라 하면, $t^2 + 1 = (t + 2)^2$ 가 성립하여 $t = -\frac{3}{4}$ 이고 원의 반지름은 $\frac{5}{4}$ 이다.

양의 실수 e 에 대하여, 점 $(e, f(e))$ 에서 그린 곡선 $y = f(x)$ 의 접선의 방정식은

$$y = (3ae^2)(x - e) + \left(ae^3 - \frac{1}{2}\right)$$

이고, 이 접선이 점 P 를 지나므로, $-2 = -3ae^3 + ae^3 - \frac{1}{2}$ 가 성립하고, $ae^3 = \frac{3}{4}$ 를 얻는다.

즉, $e = \sqrt[3]{\frac{3}{4a}}$ 이고, 이때 $f(e) = \frac{1}{4}$ 이다. 반지름을 비교하여 얻은 식

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = e^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^2 = e^2 + 1$$

로부터 $e = \frac{3}{4}$ 을 얻게 되어, $\sqrt[3]{\frac{3}{4a}} = \frac{3}{4}$, 즉 $a = \frac{16}{9}$ 이다.

[50]

(1)

2이상인 양의 정수 n 에 대해

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n + 1) - ((n-1)^2 + (n-1) + 1) = 2n$$

이고, $a_1 = S_1 = 3$ 이다.

2이상인 양의 정수 k 에 대하여, 이 삼각형 배열의 제 k 번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

번째 항이므로, $k(k+1)$ 이다. 따라서, 가장 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 합은

$$3 + \sum_{k=2}^{50} k(k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{50} (k^2 + k) = 1 + \frac{50 \times 51 \times 101}{6} + \frac{50 \times 51}{2} = 44201 \text{이다.}$$

(2)

k 가 짝수일 때, 제 k 번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1 + (1 + 2 + \cdots + (k-1)) = \frac{1}{2}(k^2 - k + 2)$$

번째 항이므로, $k^2 - k + 2$ 이다.

k 가 2이상인 홀수일 때, 제 k 번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

번째 항이므로, $k(k+1)$ 이다. 따라서, 가장 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 합은

$$3 + \sum_{m=2}^{25} (2m-1)(2m) + \sum_{m=1}^{25} ((2m)^2 - (2m) + 2) = 1 + \sum_{m=1}^{25} (8m^2 - 4m + 2)$$

이다. 이를 다시 정리하면,

$$1 + 8 \times \frac{25 \times 26 \times 51}{6} - 4 \times \frac{25 \times 26}{2} + 2 \times 25 = 42951 \text{이다.}$$

(3)

2이상인 양의 정수 n 에 대해

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

이고, $a_1 = S_1 = 2$ 이다. k 가 짝수일 때, 제 k 번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1 + (1 + 2 + \cdots + (k-1)) = \frac{1}{2}(k^2 - k + 2)$$

번째 항이므로, $2^{\frac{1}{2}(k^2 - k)}$ 이다. k 가 2이상인 홀수일 때, 제 k 번째 줄의 마지막 수는 수열의

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

번째 항이므로, $2^{\frac{1}{2}(k^2 + k - 2)}$ 이다. 따라서, 가장 위 꼭짓점에서부터 50번째 줄까지 각 줄의 가장 오른쪽에 배열되는 수들의 곱은

$$2 \times 2^{\frac{1}{2} \sum_{m=2}^{25} ((2m-1)^2 + (2m-1) - 2)} \times 2^{\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{25} ((2m)^2 - (2m))}$$

이다. 이를 다시 정리하면, 2^N 의 형태이고,

$$\begin{aligned} N &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{25} ((2m-1)^2 + (2m-1) - 2 + (2m)^2 - 2m) = 1 + \sum_{m=1}^{25} (4m^2 - 2m - 1) \\ &= 1 + 4 \times \frac{25 \times 26 \times 51}{6} - 2 \times \frac{25 \times 26}{2} - 25 = 21426 \end{aligned}$$

이다. 따라서 문제의 곱은 2^{21426} 이다.

[51]

(1)

b 가 양수인 경우, $(b, f(b))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = (2b-1)(x-b) + (b^2-b)$ 가 되고, 이 식과 $y = -x^2 - x$ 를 연립하여 풀면, $x = -b \pm \sqrt{2}b$ 를 얻는다. 함수 $g(x)$ 의 정의에 따르면, b 가 양수일 때, $g(b)$ 는 음수이므로, $g(b) = (-1 - \sqrt{2})b$ 를 얻는다.

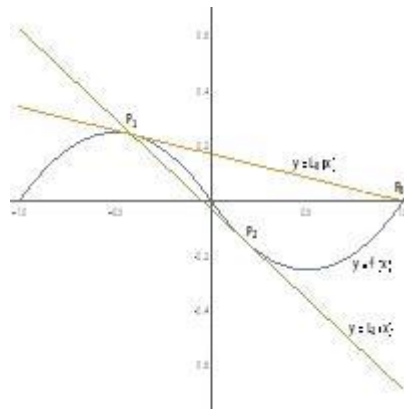
비슷한 방법으로, b 가 음수인 경우, $(b, f(b))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = (-2b-1)(x-b) + (-b^2-b)$ 가 되고, 이 식과 $y = x^2 - x$ 를 연립하여 풀면, $x = -b \pm \sqrt{2}b$ 를 얻는다. 함수 $g(x)$ 의 정의에 따르면, b 가 음수일 때, $g(b)$ 는 양수이므로, $g(b) = (-1 - \sqrt{2})b$ 를 얻는다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여, 함수 $g(x)$ 는 $g(x) = (-1 - \sqrt{2})x$ 가 되고, 역함수 $h(x)$ 는 $h(x) = (1 - \sqrt{2})x$ 와 같게 된다.

답: $g(x) = (-1 - \sqrt{2})x$, $h(x) = (1 - \sqrt{2})x$

(2)

문제에 주어진 상황을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



$x_0 = 1$ 이고, 양의 정수 n 에 대하여, $x_{n+1} = h(x_n) = (1 - \sqrt{2})x_n$ 이므로, $x_n = (1 - \sqrt{2})^n$ 과 같게 된다. 직선 $y = L_{2m}(x)$ 는 점 P_{2m+1} 을 접점으로 하는 접선의 식과 같다. 따라서 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $b = x_{2m+1} = \alpha^{2m+1}$ 이라고 두면,

$$L_{2m}(x) = (-2b-1)x + b^2 = (-2\alpha^{2m+1}-1)x + \alpha^{4m+2} \text{ 이 된다.}$$

한편, 직선 $y = L_{2m+1}(x)$ 는 점 P_{2m+2} 를 접점으로 하는 접선의 식과 같게 되므로, $c = x_{2m+2} = \alpha^{2m+2}$ 이라고 두면, $L_{2m+1}(x) = (2c-1)x - c^2 = (2\alpha^{2m+2}-1)x - \alpha^{4m+4}$ 이 된다.

답: $L_{2m}(x)$ 의 일차항 계수 : $-2\alpha^{2m+1}-1$, $L_{2m}(x)$ 의 상수항: α^{4m+2}

$L_{2m+1}(x)$ 의 일차항 계수 : $2\alpha^{2m+2}-1$, $L_{2m+1}(x)$ 의 상수항: $-\alpha^{4m+4}$

[별해]

점 $P_n = (x_n, y_n)$ 의 좌표는 n 이 짝수일 때와 홀수일 때, 각각 다음과 같이 α 와 n 으로 표현가능.

$$\text{즉, } x_n = \alpha^n, y_n = \begin{cases} \alpha^{2n} - \alpha^n, & n \text{은 짝수} \\ -\alpha^{2n} - \alpha^n, & n \text{은 홀수} \end{cases}$$

점 P_{2m} 과 P_{2m+1} 의 좌표를 위와 같이 구하여, 이를 이용하여 $L_{2m}(x)$ 의 계수들을 구한 경우에 해답으로 인정한다. 또한,

점 P_{2m+1} 과 P_{2m+2} 의 좌표를 위와 같이 구하여, 이를 이용하여 $L_{2m+1}(x)$ 의 계수들을 구한 경우도 해답으로 인정한다. 예를 들어.

$$L_{2m}(x) = \left(\frac{y_{2m+1} - y_{2m}}{x_{2m+1} - x_{2m}} \right) (x - x_{2m}) + y_{2m},$$

$L_{2m+1}(x) = \left(\frac{y_{2m+2} - y_{2m+1}}{x_{2m+2} - x_{2m+1}} \right) (x - x_{2m+1}) + y_{2m+1}$ 을 구한 후, 이 식의 계수들을 α 와 m 으로 표현할 수 있음. (단, 좌표를 맞게 구해서 표기했는지 확인 필요)

(3)

(2)에서의 풀이에서처럼 편의상 $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $b = x_{2m+1} = \alpha^{2m+1}$, $c = x_{2m+2} = \alpha^{2m+2}$ 이라고 두자.

$$\begin{aligned} A_{2m} &= \int_{x_{2m+1}}^{x_{2m}} (L_{2m}(x) - f(x)) dx \\ &= \int_b^0 ((-2b-1)x + b^2 - (-x^2 - x)) dx + \int_0^{b/\alpha} ((-2b-1)x + b^2 - (x^2 - x)) dx \\ &= \int_b^0 (x^2 - 2bx + b^2) dx + \int_0^{b/\alpha} (-x^2 - 2bx + b^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - bx^2 + b^2x \right]_b^0 + \left[-\frac{x^3}{3} - bx^2 + b^2x \right]_0^{b/\alpha} \\ &= -\frac{b^3}{3} + \left(-\frac{b^3}{3\alpha^3} - \frac{b^3}{\alpha^2} + \frac{b^3}{\alpha} \right) \\ &= -\left(\frac{\alpha^3 + 1 + 3\alpha - 3\alpha^2}{3\alpha^3} \right) b^3 = -\left(\frac{2 + 5\alpha + 1 + 3\alpha - 3 - 6\alpha}{3\alpha^3} \right) \alpha^{6m+3} \\ &= -\frac{2}{3} \alpha^{6m+1} \end{aligned}$$

이 되고,

$$\begin{aligned}
A_{2m+1} &= \int_{x_{2m+1}}^{x_{2m+2}} (f(x) - L_{2m+1}(x)) dx \\
&= \int_0^c ((x^2 - x) - ((2c-1)x - c^2)) dx + \int_{c/\alpha}^0 ((-x^2 - x) - ((2c-1)x - c^2)) dx \\
&= \int_0^c (x^2 - 2cx + c^2) dx + \int_{c/\alpha}^0 (-x^2 - 2cx + c^2) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - cx^2 + c^2x \right]_0^c + \left[-\frac{x^3}{3} - cx^2 + c^2x \right]_{c/\alpha}^0 \\
&= \frac{c^3}{3} - \left(-\frac{c^3}{3\alpha^3} - \frac{c^3}{\alpha^2} + \frac{c^3}{\alpha} \right) = \left(\frac{\alpha^3 + 1 + 3\alpha - 3\alpha^2}{3\alpha^3} \right) c^3 \\
&= \left(\frac{2 + 5\alpha + 1 + 3\alpha - 3 - 6\alpha}{3\alpha^3} \right) \alpha^{6m+6} \\
&= \frac{2}{3} \alpha^{6m+4}
\end{aligned}$$

이 된다.

$$\text{답: } A_{2m} = -\frac{2}{3} \alpha^{6m+1}, \quad A_{2m+1} = \frac{2}{3} \alpha^{6m+4} \quad (\text{단, } \alpha = 1 - \sqrt{2})$$

(4)

(3)의 풀이에 있는 결과로부터,

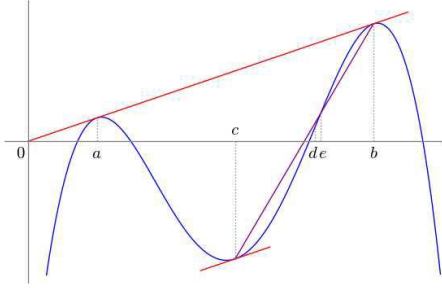
$$\frac{A_{2m+1}}{A_{2m}} = -\alpha^3 = (\sqrt{2}-1)^3 \text{ 이 되므로, } m \text{에 상관없이 일정함을 알 수 있다.}$$

$$\text{답: } \frac{A_{2m+1}}{A_{2m}} = -\alpha^3 = (\sqrt{2}-1)^3$$

[52]

(1)

문제의 상황을 그래프로 그려보면 아래와 같다.



직선 L 의 식을 $y = mx$ 라 하면 함수 $g(x) = f(x) - mx$ 은 $g(a) = g'(a) = 0$ 와 $g(b) = g'(b) = 0$ 을 만족한다. 이 조건과 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수라는 것을 이용하면 $g(x) = -(x-a)^2(x-b)^2$ 이고 따라서 $f(x) = mx - (x-a)^2(x-b)^2$ 이다. 문제의 조건으로부터 $f'(c) = m + g'(c) = m$ 이므로 $g'(c) = 0$ 이 된다. $g'(x) = -4(x-a)(x-b)(x - \frac{a+b}{2})$ 이므로 $c = \frac{a+b}{2}$ 을 얻는다.

(2)

$f(x) = mx - (x-a)^2(x-b)^2$ 을 두 번 미분하면

$$f''(x) = -4\left(3x^2 - 3(a+b)x + \frac{a^2 + 4ab + b^2}{2}\right) \text{이 된다.}$$

조건으로부터 $f''(d) = 0$ 이므로 $d = \frac{3(a+b) \pm \sqrt{3}(b-a)}{6}$ 에서 $c = \frac{a+b}{2} < d < b$ 인 것을 고르면

$$d = \frac{3(a+b) + \sqrt{3}(b-a)}{6} = \frac{(3 - \sqrt{3})a + (3 + \sqrt{3})b}{6} \text{을 얻는다.}$$

(3)

두 점 $(c, f(c))$ 와 $(b, f(b))$ 를 잇는 직선은 $y = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - b) + f(b)$ 이고 (1)에서 구한

c 를 이용해 정리하면 $y = (m + \frac{(b-a)^3}{8})(x-b) + mb$ 가 된다. 따라서 b, c, e 는

$$(m + \frac{(b-a)^3}{8})(x-b) + mb = mx - (x-a)^2(x-b)^2 \text{의 근이 된다. 이 식을 정리하면}$$

$$\frac{(b-a)^3}{8}(x-b) + (x-a)^2(x-b)^2 = 0 \text{이고 } c, e \neq b \text{이므로}$$

$$c, e \text{는 } \frac{(b-a)^3}{8} + (x-a)^2(x-b) = 0 \text{이 근이 된다.}$$

$$\text{이 식을 정리하면 } x^3 - (2a+b)x^2 + (a^2 + 2ab)x - a^2b + \frac{(b-a)^3}{8} = 0 \text{이다.}$$

또한 $c = \frac{a+b}{2}$ 이 근이 되므로 다항식의 나눗셈을 이용해 $x - \frac{a+b}{2}$ 로 이 식의 좌변을 나누면

$x^3 - (2a+b)x^2 + (a^2+2ab)x - a^2b + \frac{(b-a)^3}{8} = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(x^2 - \frac{3a+b}{2}x + \frac{a^2+4ab-b^2}{4}\right)$ 을 얻는다.

$e \neq c = \frac{a+b}{2}$ 이므로 e 는 $x^2 - \frac{3a+b}{2}x + \frac{a^2+4ab-b^2}{4} = 0$ 의 두 근 $\frac{(3a+b) \pm \sqrt{5}(b-a)}{4}$ 중 하나가 된다. 주어진 조건 $c < e < b$ 을 사용하면 $e = \frac{(3a+b) + \sqrt{5}(b-a)}{4} = \frac{(3-\sqrt{5})a + (1+\sqrt{5})b}{4}$ 을

얻는다. (만약 $e = \frac{(3a+b) - \sqrt{5}(b-a)}{4}$ 이면 $e - a = \frac{(b-a) - \sqrt{5}(b-a)}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}(b-a) < 0$ 가 되어 $a < c < e$ 에 모순이다.)

(4) 위에서 구한 식을 이용하면 $e - d = \frac{-3-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{12}(b-a)$ 이므로

$\frac{e-d}{b-a} = \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}-3}{12}$ 이다.

[53]

(1) 문제의 두 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동 시켜도 구하고자 하는 넓이의 값에는 변함이 없다. 두 그래프 $y = 2x(x-2)g(x)$ 와 $y = u(x-1)$ 는 모두 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로, x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동시켜 얻을 수 있는 두 그래프 $y = 2(x+1)(x-1)|x|$ 와 $y = -|x|+c$ 를 고려하자. 또한 대칭성에 의해 $x \geq 0$ 인 경우만 살펴보면 된다. 이 경우,

$$y = 2(x+1)(x-1)x = 2(x^3-x), \quad (2(x^3-x))' = 6x^2-2$$

이다. 방정식 $6x^2-2=-1$ 의 근은 이 구간에서 $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 이고, 이때 함수 $2(x+1)(x-1)|x|$ 의 값은 $-\frac{5\sqrt{6}}{18}$ 이다. 즉, 함수 $y = -|x|+c$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{18}\right)$ 을 지나야 하므로, 상수 c 의 값은 $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ 이다. 따라서, 구하고자 하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{6}} \left(2(x^3-x) + x + \frac{\sqrt{6}}{9} \right) dx &= 2 \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{6}}{9}x \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{6}} \\ &= 2 \left(\frac{1}{72} - \frac{1}{12} + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

이다.

(2) 문제에서 넓이를 구하고자 하는 부분은 직선 $y=x$ 에 대해 대칭이므로, 곡선 $y=(x-a)g(x)$ 및 두 직선 $y=x$ 와 $y=-x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 두 배가 구하고자 하는 넓이이다.

곡선 $y=(x-a)g(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표 t_2 는, 방정식

$$(x-a)^2 = x$$

의 근이고, 곡선 $y=(x-a)g(x)$ 와 직선 $y=-x$ 의 교점의 x 좌표 t_1 은, 방정식

$$-(x-a)^2 = -x$$

의 근이다. 따라서, $t_1+t_2=2a+1$ 과 $t_1t_2=a^2$ 이 성립한다.

이때, 곡선 $y=(x-a)g(x)$ 및 두 직선 $y=x$ 와 $y=-x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 + \int_{t_1}^a (x-a)^2 dx - \int_a^{t_2} (x-a)^2 dx$$

와 같고, 이를 정리하면

$$\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) + \frac{2}{3}a^3 - (t_1+t_2)a^2 + (t_1^2+t_2^2)a - \frac{1}{3}(t_1^3+t_2^3) = a^2 + a + \frac{1}{6}$$

를 얻게 된다. 따라서, $S(k) = 2k^2 + 2k + \frac{1}{3}$ 이고,

$$\sum_{k=1}^{12} S(k) = \frac{12 \times 13 \times 25}{3} + 12 \times 13 + 4 = 1460 \text{ 이다.}$$

(3)

먼저 $a=b$ 일 때는, 문제의 등식이 항상 성립한다.

그리고 $a=0$ 일 때, $\int_0^b x^2|x|dx=0$ 이므로 $b=0$ 이다.

먼저 $a>0$ 을 가정하자. 만약 $a<b$ 라면, 문제의 등식에서

$$\begin{aligned} \int_0^b (x-a)^2|x-a|dx &= \int_0^a -(x-a)^3dx + \int_a^b (x-a)^3dx \\ &= \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}(b-a)^4 \end{aligned}$$

와

$$\begin{aligned} \int_0^a (x-b)^2|x-b|dx &= \int_0^a -(x-b)^3dx \\ &= \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}(a-b)^4 \end{aligned}$$

이 성립하므로, $a^4 + (a-b)^4 = -(a-b)^4 + b^4$ 을 얻게 된다. $0 < t = \frac{a}{b} < 1$ 로 치환하면, 다음 방정식

$$3t^4 - 8t^3 + 12t^2 - 8t + 1 = (t-1)(3t^3 - 5t^2 + 7t - 1) = 0$$

을 얻게 된다. 함수 $p(t) = 3t^3 - 5t^2 + 7t - 1$ 에 대하여

$$p'(t) = 9t^2 - 10t + 7 > 0 \text{ 와 } p(0) = -1, p(1) = 4$$

이 성립하므로, 다항식 $p(t) = 0$ 은 열린구간 $(0,1)$ 에서 유일한 실근 t_0 을 갖는다. 즉,

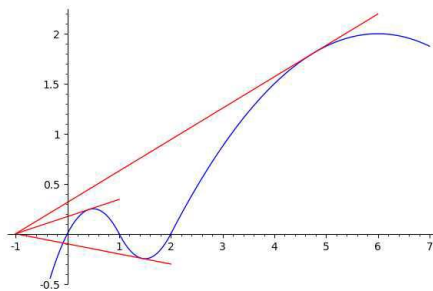
$b = \frac{1}{t_0}a$ 이다. $0 < b < a$ 임을 가정하면, a 와 b 의 역할을 바꾼 뒤, 위의 논리를 적용하면 $a = \frac{1}{t_0}b$ 를 얻게 된다. 즉, $b = t_0a$ 이다. $b \leq 0$ 임을 가정하면, $\int_0^b (x-a)^2|x-a|dx \leq 0$ 인 반면, $\int_0^a (x-b)^2|x-b|dx > 0$ 이므로, 식이 성립하지 않는다. 따라서, 주어진 a 에 대해 등식을 만족하는 b 는 t_0a , a , $\frac{1}{t_0}a$ 로 세 개가 존재하고, 이들의 곱은 a^3 이다.

마지막으로, $a < 0$ 인 경우도 대칭성에 의해 $a > 0$ 인 경우와 같이 a^3 을 얻게 된다.

[54]

(1)

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{f''(0)}{2} = -1$ 이고 두 근 $0, 1$ 을 가지므로 $f(x) = -x(x-1) = -x^2 + x$ 이다. $g(x) = 0$ 는 두 근 $1, 2$ 를 가지므로 어떤 실수 a 에 대해 $g(x) = a(x-1)(x-2)$ 라 쓸 수 있다. $F(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $f'(1) = -1$ 와 $g'(1) = -a$ 의 값이 같고 따라서 $a = 1$, 즉 $g(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ 이 된다. $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$ 이고 $1 < x \leq 2$ 일 때 $g(x) \leq 0$ 이므로 $F(x)$ 의 최댓값 2는 $h(x)$ 의 최댓값과 같아야 한다. $h(x)$ 이 $x=c$ 에서 최댓값을 갖는다고 하면 어떤 실수 b 에 대해 $h(x) = 2 - b(x-c)^2$ 로 쓸 수 있다. $F(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $h(2) = 2 - b(2-c)^2 = g(2) = 0$ 이고 $h'(2) = -2b(2-c) = g'(2) = 1$ 을 만족한다. 두 식을 풀면 $c = 6$ 과 $b = \frac{1}{8}$ 을 얻는다. 따라서 $h(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ 이다. 이해를 돕기 위해 $y = F(x)$ 와 세 접선을 그래프로 그리면 아래와 같다.



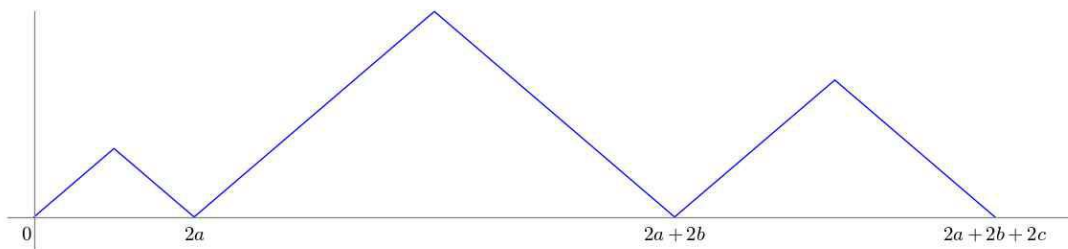
(2)

이차함수 $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ 이 있을 때 $y = p(x)$ 의 $x=t$ 에서의 접선의 식은 $y = p'(t)(x-t) + p(t)$ 이다. 이 접선이 $(-1, 0)$ 을 지난다면 $0 = p'(t)(-1-t) + p(t)$ 을 만족한다. 이 식에 $p(t) = At^2 + Bt + C$ 와 $p'(t) = 2At + B$ 를 대입하여 얻어진 t 에 관한 이차식

을 풀면 $t = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + A(C-B)}}{-A}$ 을 얻는다. 문제로 돌아가서 $(-1, 0)$ 에서 $y = F(x)$ 에 그은 접선은 이 점에서 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ 에 그은 접선 중 하나가 된다. 접점의 x 좌표를 t 라고 할 때 $0 < t \leq 1$ 인 것은 $y = f(x)$ 에 그은 접선에서 얻어지므로 위에서 구한 식을 이용하면 $t = \sqrt{2} - 1$ 을 얻는다. $1 < t \leq 2$ 인 것은 $y = g(x)$ 에 그은 접선에서 얻어지므로 $t = \sqrt{6} - 1$ 이고 $t > 2$ 인 것은 $y = h(x)$ 에 그은 접선에서 얻어지므로 $t = \sqrt{33} - 1$ 이 된다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 x 좌표의 값은 $\sqrt{2} - 1$, $\sqrt{6} - 1$, $\sqrt{33} - 1$ 이다.

(3)

(2)에서 구한 결과로부터 $k(x)$ 는 구간 $[0, \sqrt{2} - 1]$ 에서 증가, 구간 $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{6} - 1]$ 에서 감소, 구간 $[\sqrt{6} - 1, \sqrt{33} - 1]$ 에서 증가, 구간 $[\sqrt{33} - 1, \infty]$ 에서 감소한다. 따라서 $k(x)$ 는 $x = \sqrt{2} - 1$ 와 $x = \sqrt{33} - 1$ 일 때 극댓값을 가진다. 또한 $y = G(x)$ 는 구간 $[0, 2a + 2b + 2c]$ 에서 아래와 같이 그려지므로 함수 $G(x)$ 는 x 가 0에서 $2a + 2b + 2c$ 까지 변할 때, 함숫값이 연속적으로 0에서 a 까지 증가, a 에서 0까지 감소, 0에서 b 까지 증가, b 에서 0까지 감소, 0에서 c 까지 증가, c 에서 0까지 감소한다.



1에서 6까지의 정수 d 에 대해 $G(x)$ 의 값이 0에서 d 까지 증가하고 d 에서 0까지 감소할 때 나타나는 $k(G(x))$ 의 극댓값의 개수를 $m(d)$ 라 하자. 위에서 구한 $k(x)$ 의 성질에 의해 $k(G(x))$ 가 극댓값을 가지려면 $G(x) = \sqrt{2} - 1$, $G(x) = \sqrt{33} - 1$, 이거나 $G(x) = d$ 이고 d 가 함수 $k(x)$ 가 증가하는 구간인 $[0, \sqrt{2} - 1]$ 또한 $[\sqrt{6} - 1, \sqrt{33} - 1]$ 에 속해야 한다. (단, $d \geq 1$ 이므로 구간 $[0, \sqrt{2} - 1]$ 은 생략해도 무방하다.) 또한 $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, $1 < \sqrt{6} - 1 < 2$, $4 < \sqrt{33} - 1 < 5$ 이므로 이를 종합하면 $m(1) = 2$, $m(2) = m(3) = m(4) = 3$, $m(5) = m(6) = 4$ 임을 알 수 있다. 예를 들면 $d = 3$ 인 경우 $G(x)$ 의 값이 0에서 3까지 증가할 때 $G(x) = \sqrt{2} - 1$ 이 한번 성립하므로 $k(G(x))$ 의 극댓값이 한 개 생기고, $G(x) = 3$ 의 값이 구간 $[\sqrt{6} - 1, \sqrt{33} - 1]$ 에 속하므로 $k(G(x))$ 의 극댓값이 한 개 생기고, $G(x)$ 의 값이 3에서 0까지 감소할 때 $G(x) = \sqrt{2} - 1$ 이 한번 성립하므로 $k(G(x))$ 의 극댓값이 한 개 생겨서 $m(3) = 3$ 이 된다.

문제에서 주어진 조건은 $m(a) + m(b) + m(c) = 9$ 가 되고 이를 만족하려면 $m(a), m(b), m(c)$ 가 이3,3,3거나 2,3,4의 순열이 되어야 한다. $m(a), m(b), m(c)$ 가 3,3,3인 경우는 a, b, c 가 각각 2,3,4 중 하나가 될 수 있으므로 $3^2 = 27$ 가지가 있다. $m(a), m(b), m(c)$ 가 2,3,4의 순열인 경우에는 a, b, c 가 1 한 개와 2,3,4중에 한 개, 5,6중에 한 개를 골라 배열하여 얻어지는 것이므로 $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ 가지가 있다. 따라서 총 경우의 수는

$27 + 36 = 63$ 이다.

[55]

(1) $f(0) = c$ 이므로, $f(0) < 0$ 이라는 조건은 $c < 0$ 이라는 조건과 같다.

$a > 0$ 인 경우, $1 = b^2 - 4ac = b^2 + 4a|c| \geq 4$ 이므로 모순이 된다.

$a < 0$ 인 경우, 이차함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 오목하므로, $f(N) > 0$ 라는 조건을 만족할 때, N 은 이차함수 $f(x)$ 의 두 근 사이에 놓여있게 된다. 근의 공식과 판별식 $b^2 - 4ac = 1$ 이라는 조건으로부터, 이차함수 $f(x)$ 의 두 근은 $\frac{-b \pm 1}{2a}$ 로 주어지게 되므로, 다음의 부등식이 성립하게 된다.

$$\frac{-b+1}{2a} < N < \frac{-b-1}{2a}$$

위 부등식에 $2a$ 를 곱하면, 우리는 다음의 부등식을 얻는다.

$$-b-1 < 2Na < -b+1$$

따라서 $a < 0$ 인 경우, $-b = 2Na$ 가 되어 $b^2 - 4ac$ 는 짝수가 되므로, $b^2 - 4ac = 1$ 이라는 조건에 모순이 된다.

그러므로, 이차함수 $f(x)$ 는 두 조건 $f(0) < 0$ 과 $f(N) > 0$ 을 동시에 만족할 수 없다.

답: 제시문에 주어진 이차함수 $f(x)$ 는 두 조건 $f(0) < 0$ 과 $f(N) > 0$ 을 동시에 만족할 수 없다.

(2)

주어진 조건으로부터, $f\left(\frac{1}{N}\right) = a\left(\frac{1}{N}\right)^2 + b\left(\frac{1}{N}\right) + c > 0$ 이므로, 양변에 N^2 을 곱하면, 다음의 부등식을 얻는다.

$$cN^2 + bN + a > 0$$

c 가 0이 아닌 정수인 경우에, 이차함수 $g(x)$ 를 $g(x) = cx^2 + bx + a$ 라고 정의하면, 주어진 조건들로부터 이차함수 $g(x)$ 는 두 조건 $g(0) < 0$ 와 $g(N) > 0$ 을 동시에 만족하게 된다. 따라서 문제 (1)의 풀이에 있는 결과로부터, 그러한 이차함수 $g(x)$ 는 존재하지 않는다. 따라서 $c = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 이제 $c = 0$ 이 되므로, $b^2 - 4ac = 1$ 이라는 조건으로부터, $b = \pm 1$ 을 얻는다. 이제 조건 $f\left(\frac{1}{N}\right) > 0$ 로부터 다음의 부등식을 얻게 된다.

$$f\left(\frac{1}{N}\right) = a\left(\frac{1}{N}\right)^2 + b\left(\frac{1}{N}\right) + c = a\left(\frac{1}{N}\right)^2 \pm \left(\frac{1}{N}\right) = \frac{a \pm N}{N^2} > 0$$

a 는 음의 정수이므로, $b = -1$ 인 경우, 위 부등식이 만족되지 않으므로, $b = 1$ 이 되어야 한다. 이 경우에 $a = -1$ 부터 $a = -(N-1)$ 까지의 음의 정수에 대하여, 위 부등식이 성립하게 된다. 따라서 구하는 이차함수 $f(x)$ 의 형태는 다음과 같다.

$$f(x) = -rx^2 + x \quad (\text{단, } 1 \leq r \leq N-1 \text{인 정수})$$

답: $f(x) = -rx^2 + x$ (단, $1 \leq r \leq N-1$ 인 정수)

(3)

주어진 조건으로부터, $c < 0$ 이고, $f\left(\frac{2}{M}\right) = a\left(\frac{2}{M}\right)^2 + b\left(\frac{2}{M}\right) + c > 0$ 이므로, 양변에 $\left(\frac{M}{2}\right)^2$ 을 곱하면, 다음의 부등식을 얻는다.

$$c\left(\frac{M}{2}\right)^2 + b\left(\frac{M}{2}\right) + a > 0$$

이차함수 $h(x)$ 를 $h(x) = cx^2 + bx + a$ 라고 정의하면, $h\left(\frac{M}{2}\right) > 0$ 이다. 이제 이차함수 $k(x)$ 를 $h\left(x + \frac{M-1}{2}\right)$ 로 정의하면, $k(x)$ 의 최고차항은 음의 정수이고, 판별식은 1이며, $k\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ 이 된다. 따라서 문제 (2)의 풀이에 있는 결과로부터, $k(x) = -x^2 + x$ 가 된다. 따라서

$$h(x) = k\left(x - \left(\frac{M-1}{2}\right)\right) = -\left(x - \left(\frac{M-1}{2}\right)\right)^2 + \left(x - \left(\frac{M-1}{2}\right)\right) = -x^2 + Mx + \left(\frac{1-M^2}{4}\right) \text{이므로,}$$

$$f(x) = \left(\frac{1-M^2}{4}\right)x^2 + Mx - 1 \text{이 된다.}$$

$$\text{답: } f(x) = \left(\frac{1-M^2}{4}\right)x^2 + Mx - 1$$

(4)

문제 (2)의 풀이에 있는 결과로부터, $Q(x) = -rx^2 + x$ (단, $1 \leq r \leq 99$ 인 정수)이므로, $a_1 = Q(1) = -r + 1$ 이 되고, 2 이상의 양의 정수 n 에 대하여, $a_n = Q(n) - Q(n-1) = -2rn + (r+1)$ 을 얻는다. 한편, 문제 (3)의 풀이에 있는 결과로부터 $R(x) = -90x^2 + 19x - 1$ 이므로, $b_1 = R(1) = -72$ 가 되고, 2이상의 양의 정수 n 에 대하여, $b_n = R(n) - R(n-1) = -180n + 109$ 를 얻는다. 이제 $S = \sum_{n=1}^{10} |a_n - b_n|$ 라고 놓으면,

$S = |a_1 - b_1| + \sum_{n=2}^{10} |a_n - b_n| = |73 - r| + \sum_{n=2}^{10} |(180 - 2r)n + (r - 108)|$ 과 같게 된다. 다음과 같이 r 의 값에 대한 경우를 나누어 S 의 최댓값과 최솟값을 살펴보자.

경우1: $91 \leq r \leq 99$

이 경우, 양의 정수 n 에 대하여, $(180 - 2r)n + (r - 108)$ 의 값은 항상 음수가 된다. 따라서,

$$S = |73 - r| - \sum_{n=2}^{10} ((180 - 2r)n + (r - 108)) = 100r - 8821 \text{이 되어, } 279 \leq S \leq 1079 \text{가 된다.}$$

경우2: $r = 90$

$$S = |73 - r| + \sum_{n=2}^{10} |r - 108| = 17 + 18 \times 9 = 179$$

경우3: $r=89$

$$S = 16 + \sum_{n=2}^{10} |2n - 19| = 16 + \sum_{n=2}^9 (19 - 2n) + 1 = 81$$

경우4: $r=88$

$$S = 15 + \sum_{n=2}^{10} |4n - 20| = 15 + \sum_{n=2}^4 (20 - 4n) + \sum_{n=5}^{10} (4n - 20) = 99$$

경우5: $r=87$

$$S = 14 + \sum_{n=2}^{10} |6n - 21| = 14 + \sum_{n=2}^3 (21 - 6n) + \sum_{n=4}^{10} (6n - 21) = 173$$

경우6: $r=86$

$$S = 13 + \sum_{n=2}^{10} |8n - 22| = 13 + 6 + \sum_{n=3}^{10} (8n - 22) = 259$$

경우7: $r=85$

$$S = 12 + \sum_{n=2}^{10} |10n - 23| = 12 + 3 + \sum_{n=3}^{10} (10n - 23) = 351$$

경우8: $1 \leq r \leq 84$

이 경우, 2이상의 정수 n 에 대하여, $(180 - 2r)n + (r - 108)$ 의 값은 항상 양수가 된다. 따라서,

$$S = |73 - r| + \sum_{n=2}^{10} ((180 - 2r)n + (r - 108)) = |73 - r| + 8748 - 99r$$

$$= \begin{cases} -98r + 8675, & 73 \leq r \leq 84 \\ -100r + 8821, & 1 \leq r \leq 72 \end{cases} \text{ 이므로,}$$

$73 \leq r \leq 84$ 인 경우, $443 \leq S \leq 1521$ 이 되고, $1 \leq r \leq 72$ 인 경우, $1621 \leq S \leq 8721$ 이 된다.

경우1부터 경우8까지를 종합하면, S 의 최솟값은 81, 최댓값은 8721임을 알 수 있다.

답: 최솟값은 81, 최댓값은 8721

[56]

[1 - i]

$$\begin{aligned}
\text{먼저, } -af_{n+1} + bf_n &= (\alpha + \beta) \left(\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^{n+1-k} \beta^k \right) - (\alpha\beta) \left(\sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} \beta^k \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^{n+2-k} \beta^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^{n+1-k} \beta^{k+1} \right) - \left(\sum_{k=0}^n \alpha^{n+1-k} \beta^{k+1} \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^{n+2-k} \beta^k \right) + \beta^{n+2} \\
&= f_{n+2}
\end{aligned}$$

가 성립한다.

[1-ii]

자연수 n 에 대하여 명제 $p(n)$ 을 “ f_n 과 f_{n+1} 이 정수이다”로 설정하자. $f_1 = \alpha + \beta = -a$ 이고, $f_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = a^2 + b$ 이므로 두 수 모두 정수이다.

따라서, 명제 $p(n)$ 은 $n=1$ 일 때 참이다.

명제 $p(n)$ 이 $n=k$ 일 때 참이라고 가정하면, f_k 와 f_{k+1} 이 정수이다.

이때, $f_{k+2} = -af_{k+1} + bf_k$ 이므로, f_{k+2} 도 정수이다.

즉, f_{k+1} 과 f_{k+2} 가 정수이므로 명제 $p(n)$ 이 $n=k+1$ 일 때 참이다.

따라서, 수열 $\{f_n\}$ 의 모든 항이 정수이다.

[1-iii]

동전을 5번 던져 나올 수 있는 (a, b) 는 아래의 여섯가지이다.

□□□□□ □□□□□ □□□□□ □(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0) □□□ □□□□□ □□□□□

각각에 대해서 [1-i]의 결과를 적용시키면 아래와 같은 표를 얻을 수 있다. □

	f_{n+2}	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
(0, 5)	$5f_n$	0	5	0	25	0
(1, 4)	$-f_{n+1} + 4f_n$	-1	5	-9	29	-65
(2, 3)	$-2f_{n+1} + 3f_n$	-2	7	-20	61	-182
(3, 2)	$-3f_{n+1} + 2f_n$	-3	11	-39	139	-495
(4, 1)	$-4f_{n+1} + f_n$	-4	17	-72	305	-1292
(5, 0)	$-5f_{n+1}$	-5	25	-125	625	-3125

위의 표에서와 같이 절댓값 $|f_5|$ 의 값이 1000보다 큰 경우는 (a, b) 가 (4, 1) 또는 (5, 0)인 경우이다. 즉, 동전을 5번 던져 앞면이 4번 이상 나오는 경우이다. 동전의 앞면이 4번 나오는 경우는 5가지이고, 앞면이 5번 나오는 경우는 1가지이므로, 모두 6가지이다.

[57]

[2- i]

$3x + 2 = 15a - 25b = 5(3a - 5b)$ 이므로, $3x + 2$ 는 5의 배수이다.

따라서, $x = 5k + 1$ 의 꼴이다. 이를 다시 대입하면, $3k + 1 = 3a - 5b$ 를 얻게 된다.

여기서, x 는 음이 아닌 정수이므로, k 도 음이 아닌 정수이다.

$(a, b) = (2, 1)$ 을 대입하면, $3a - 5b = 1$ 을 얻게 되므로, $3k + 1$ 꼴의 음이 아닌 정수는 항상 $3a - 5b$ 의 형태로 쓰여지게 된다.

이로부터 집합 S 는 $5k + 1$ 꼴의 음이 아닌 정수들의 집합이고, $a_n = 5n - 4$ 임을 알 수 있다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 5인 등차수열이다.

따라서, $a_{100} = 496$ 이다.

[2-ii]

$$\begin{aligned} \text{제시문을 이용하여 } \sum_{n=1}^m a_n^2 &= \sum_{n=1}^m (5n-4)^2 \\ &= 25 \left(\sum_{n=1}^m n^2 \right) - 40 \left(\sum_{n=1}^m n \right) + 16 \left(\sum_{n=1}^m 1 \right) \\ &= \frac{25m(m+1)(2m+1)}{6} - 20m(m+1) + 16m \\ &= \frac{m(50m^2 - 45m + 1)}{6} \end{aligned}$$

을 얻게 된다. 소문항의 식은 $\square \sum_{n=1}^{20} a_n^2 - \sum_{n=1}^{10} a_n^2$ 이므로, $m = 10, 20$ 일 때 계산한 다음, 빼주면

$$\text{된다. 즉, } \square \frac{20(50 \times 20^2 - 45 \times 20 + 1)}{6} - \frac{10(50 \times 10^2 - 45 \times 10 + 1)}{6} = 56085 \text{이다.}$$

[2-iii]

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 $p = 5 - c$ 인 등차수열이다. 따라서,

$$T_n = \frac{n\{2 + (n-1)p\}}{2}$$

이다. 비 $\frac{T_{2n}}{T_n} = k$ 가 일정하다면,

$$\frac{2n\{2 + (2n-1)p\}}{2} = \frac{kn\{2 + (n-1)p\}}{2}$$

가 성립한다. 양변을 n 으로 나눈 다음 정리하면,

$$(4-k)p = (k-2)(2-p)$$

을 얻게 된다. 따라서 $(4-k)p = 0$ 이므로, $k = 4$ 또는 $p = 0$ 이고 이로부터 $k = 4$ 일 때, $p = 2$ 이고 $p = 0$ 일 때, $k = 2$ 이다. 따라서 이로부터 $c = 5$ 또는 3이다.

[58]

[3-i]

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x - |-x+2| + |-x+1| - |-x-1| + |-x-2| \\ &= -x - |x-2| + |x-1| - |x+1| + |x+2| \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

이므로, $y=f(x)$ 는 원점에 대해 대칭이다.

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x)=x$ 이다.

닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $f(x)=-x+2$ 이다.

구간 $[2, \infty)$ 에서 $f(x)=x-2$ 이다.

따라서, $x=a$ 에서 극댓값을 가지기 위한 a 의 값은 $-2, 1$ 이다.

[3-ii]

$g(-x) = |-x|^3 - (-x)^2 = |x|^3 - x^2 = g(x)$ 이므로, 함수 $y=g(x)$ 는 y 축에 대해 대칭이다.

따라서, $h(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x)) = h(x)$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 도 y 축에 대해 대칭이다. 이제 $x \geq 0$ 일 때, 함수 $y=h(x)$ 를 살펴보자.

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $h(x) = g(x) = x^3 - x^2$ 이다.

닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $h(x) = g(-x+2) = (x-2)^2(1-x)$ 이므로, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서의 함수 $h(x) = g(x) = x^3 - x^2$ 를 직선 $x=1$ 에 대해 대칭이동시킨 것이다.

구간 $[2, \infty)$ 에서 $h(x) = g(x-2)$ 이므로, 구간 $[0, \infty)$ 에서의 함수 $g(x) = x^3 - x^2$ 를 x 축 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다. 따라서, $x=0, 1, 2$ 에서 극댓값을 가진다.

$g'(x) = 3x^2 - 2x = 0$ 으로부터 $x = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$ 에서 극솟값을 가진다.

대칭성에 의해, $x=-2, -1$ 에서도 극댓값을 가지고, $x=-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}$ 에서도 극솟값을 가진다.

따라서, 극댓값을 가지는 $x=a$ 의 절댓값의 합은 $0+2(1+2)=6$ 이고, 극솟값을 가지는 $x=b$ 의 절댓값의 합은 $2\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{28}{3}$ 이다.

[3-iii]

함수 $h(x)$ 는 y 축에 대해 대칭이므로 $\int_{-2}^2 h(x)dx = 2 \int_0^2 h(x)dx$ 이다. 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

함수 $h(x)$ 는 직선 $x=1$ 에 대해서 대칭이므로 $\int_0^2 h(x)dx = 2 \int_0^1 h(x)dx$ 이다.

따라서, $\int_{-2}^2 h(x)dx = 4 \int_0^1 h(x)dx = 4 \int_0^1 h(x^3 - x^2)dx = -\frac{1}{3}$ 이다.

[59]

(1) 원점 O 와 점 P 를 지나는 직선의 방정식 $y = -\frac{1}{2}x$ 과 곡선 $y = (x+1)^2$ 연립하면

$$-\frac{1}{2}x = (x+1)^2$$

이를 정리하면

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

이다. 두 개의 해 중 $-1 < x < 0$ 을 만족하는 해는

$$x = -\frac{1}{2}$$

따라서

$$P(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

이고 점 P 를 지나는 접선의 방정식은

$$y = 2(-\frac{1}{2} + 1)(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = x + \frac{3}{4}$$

이를 원의 방정식에 대입하면

$$32x^2 + 24x - 7 = 0$$

이 방정식의 두 근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 근과 계수의 공식에 의해

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{4}, \alpha\beta = -\frac{7}{32}$$

를 만족하고 점 E, F 는

$$E = (\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2}), F = (\beta, \sqrt{1-\beta^2})$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} \overline{EF}^2 &= (\alpha - \beta)^2 + (\sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{1-\beta^2})^2 \\ &= 2 - 2\alpha\beta + 2\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2+\alpha^2\beta^2} \\ &= 2 - 2\alpha\beta + 2\sqrt{1-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2} \\ &= 2 - 2(-\frac{7}{32}) + 2\sqrt{1-(-\frac{3}{4})^2+2(-\frac{7}{32})+(-\frac{7}{32})^2} \\ &= \frac{23}{8} \end{aligned}$$

(2) $P(p, (p+1)^2)$ ($-1 < p < 0$)이라 하면

$$\overline{OP}^2 = p^2 + (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 4p + 1$$

이다. 따라서 $-1 < p < 0$ 에서 정의된 함수 $g(p)$ 를

$$g(p) = p^2 + (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 4p + 1$$

로 정의하고 함수 $g(p)$ 의 최솟값을 조사하면 된다. 함수 $g(p)$ 를 미분하면

$$g'(p) = 4p^3 + 12p^2 + 14p + 4$$

이는

$$g'(p) = 4(p+1)^3 + 2p$$

로 적을 수 있다. 따라서

$$y = 4(p+1)^3, y = -2p$$

의 교점에서 $g'(p)=0$ 가 됨을 알 수 있다.

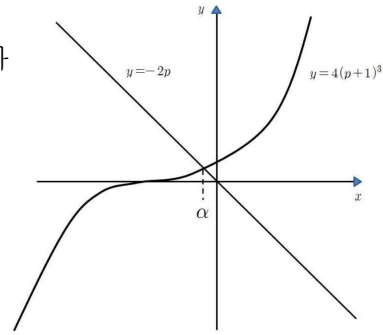
오른쪽 그림과 같이 두 곡선과 직선의 그래프를 고려하면

$$4(\alpha+1)^3 = -2\alpha$$

인 $0 < \alpha < 1$ 가 유일하게 존재함을 알 수 있다.

이로부터 함수의 증감을 조사하면

p		α	
$g'(p)$	-	0	
$g(p)$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$



따라서 $g(p)$ 는 α 에서 최소가 되고 α 는

$$\alpha = -2(\alpha+1)^3 \quad \text{----- (1)}$$

을 만족한다.

직선 L 의 기울기는 $2(\alpha+1)$ 이고 직선 OP 의 기울기는

$$\frac{0 - (\alpha+1)^2}{0 - \alpha} = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$$

이므로 (1)을 사용하면 L 의 기울기와 직선 OP 의 기울기의 곱은

$$2(\alpha+1) \times \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} = \frac{2(\alpha+1)^3}{\alpha} = -1$$

이다. 따라서 직선 L 과 선분 OP 는 수직이다.

(3) 점 $P(p, (p+1)^2)$ 라 두면 A, B 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A(-\sqrt{1-(p+1)^4}, (p+1)^2), B(\sqrt{1-(p+1)^4}, (p+1)^2)$$

따라서

$$\overline{AP} \times \overline{PB} = (p + \sqrt{1-(1+p)^4})(\sqrt{1-(p+1)^4} - p) = 1 - p^2 - (1+p)^4 = 1 - \overline{OP}^2$$

이로부터 $\overline{AP} \times \overline{PB}$ 가 최대가 될 때는 $\overline{OP}$ 가 최소가 될 때 임을 알 수 있다. 따라서 (2)

에 의해 $\overline{AP} \times \overline{PB}$ 가 최댓값을 가질 때 직선 L 과 선분 OP 가 수직이다.

[60]

(1) 사인법칙에 의해서

$$\frac{\sqrt{3}a}{\sin A} = 2a$$

이므로

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 이다.

(2) 편의상 $x = \overline{AB}$, $y = \overline{AC}$ 라 두자.

정삼각형일 때 $x = y = 10\sqrt{3}$ 이고 <제시문 2>의 (3)에 의해 $y \leq x$ 이므로

$$x \geq 10\sqrt{3}$$

임을 알 수 있다. 한편 x 는 지름보다, 클 수 없으므로

$$x \leq 20$$

따라서

$$10\sqrt{3} \leq x \leq 20$$

양변을 제곱하면,

$$300 \leq x^2 \leq 400$$

이를 만족하는 양의 정수는

$$x = 18, 19, 20 \quad \text{-----} \quad (1)$$

한편 A 는 예각이므로 (1)에 의해

$$\cos A = \frac{1}{2}$$

따라서 코사인법칙을 이용하면

$$x^2 + y^2 - xy = 300 \quad \text{-----} \quad (2)$$

이다. (1), (2)로부터 다음의 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

$x = 18$ 일 때 $y^2 - 18y + 24 = 0$ 이고 18보다 작은 양수 해는 $y = 9 \pm \sqrt{57}$

$x = 19$ 일 때 $y^2 - 19y + 61 = 0$ 이고 19보다 작은 양수 해는 $y = \frac{19 \pm 3\sqrt{13}}{2}$

$x = 20$ 일 때 $y^2 - 20y + 100 = 0$ 이므로 $y = 10$

따라서 구하는 순서쌍은 (20, 10) 이다.

(3) 편의상 $x = \overline{AB}$, $y = \overline{AC}$ 라 두자.

두 변의 합은 나머지 한 변 보다 커야 하므로

$$x + y > \overline{BC} = \sqrt{30}$$

x, y 가 지름보다 클 수는 없으므로

$$x + y \leq 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

따라서

$$M = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

만 고려하면 된다.

(1) $M = 6$ 일 때

코사인 법칙에 의해

$$x^2 + y^2 - xy = 30$$

가 성립한다.

$x + x = 6$ 를 대입하면

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

혹은

$$y^2 - 6y + 2 = 0$$

따라서 x, y 는

$$X^2 - 6X + 2 = 0$$

의 두 근이다. 이를 풀면 $x = 3 + \sqrt{7}, y = 3 - \sqrt{7}$

마찬가지로 계산하면

$$(2) M=7 \text{ 일 때 } 3X^2 - 21X + 19 = 0 \text{ 이고 해는 } x = \frac{21 + \sqrt{213}}{6}, y = \frac{21 - \sqrt{213}}{6}$$

$$(3) M=8 \text{ 일 때 } 3X^2 - 24X + 34 = 0 \text{ 이고 해는 } x = \frac{12 + \sqrt{42}}{3}, y = \frac{12 - \sqrt{42}}{3}$$

$$(4) M=9 \text{ 일 때 } X^2 - 9X + 17 = 0 \text{ 이고 해는 } x = \frac{9 + \sqrt{13}}{2}, y = \frac{9 - \sqrt{13}}{2}$$

$$(5) M=10 \text{ 일 때 } 3X^2 - 30X + 70 = 0 \text{ 이고 해는 } x = \frac{15 + \sqrt{15}}{3}, y = \frac{15 - \sqrt{15}}{3}$$

(6) $M=11$ 일 때 $3X^2 - 33X + 91 = 0$ 이고 실근을 가지지 않는다.

(7) $M=12$ 일 때 $X^2 - 12X + 38 = 0$ 이고 해는 실근을 가지지 않는다.

따라서 가능한 값은 $M=6, 7, 8, 9, 10$ 이고 구하는 값은 $6+7+8+9+10=40$

(4) 편의상 $x = \overline{AB}, y = \overline{AC}$ 라 두자.

x, y 가 모두 지름보다 클 수는 없으므로 $xy \leq 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$

따라서 $N=1, 2, \dots, 8$ 만 고려하면 된다.

(1) $N=1$ 일 때: $xy=1$ 를 코사인법칙

$$x^2 + y^2 - xy = 6$$

에 대입하여 y 를 소거하면

$$x^4 - 7x^2 + 1 = 0$$

을 얻는다. 마찬가지로 방법으로 x 를 소거하면

$$y^4 - 7y^2 + 1 = 0$$

따라서 x^2, y^2 는 다음 방정식을 만족한다.

$$X^2 - 7X + 1 = 0$$

이를 풀면 $x^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}, y^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ 이다.

마찬가지로 계산하면

$$(2) N=2 \text{ 일 때 } X^2 - 8X + 4 = 0 \text{ 이고 그 해는 } x^2 = 4 + 2\sqrt{3}, y^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$(3) N=3 \text{ 일 때 } X^2 - 9X + 9 = 0 \text{ 이고 그 해는 } x^2 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}, y^2 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$$

$$(4) N=4 \text{ 일 때 } X^2 - 10X + 16 = 0 \text{ 이고 그 해는 } x^2 = 8, y^2 = 2$$

$$(5) N=5 \text{ 일 때 } X^2 - 11X + 25 = 0 \text{ 이고 그 해는 } x^2 = \frac{11+\sqrt{21}}{2}, y^2 = \frac{11-\sqrt{21}}{2}$$

$$(6) N=6 \text{ 일 때 } X^2 - 12X + 36 = 0 \text{ 이고 그 해는 } x^2 = 6, y^2 = 6$$

(7) $N=7$ 일 때 $X^2 - 13X + 49 = 0$ 이고 이 방정식은 실근을 가지지 않는다.

(8) $N=8$ 일 때 $X^2-14X+64=0$ 이고 이 방정식은 실근을 가지지 않는다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 N 은 $N=1,2,3,5$ 이고 구하는 값은 $N=1+2+3+5=11$ 이다.

[61]

(1) 정사각형 R_n 의 한 변의 길이를 r_n 이라고 할 때, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$r_2 \tan \theta + r_2 = r_1 \text{ 이므로 } r_2 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_1$$

$$r_3 \tan \theta + r_3 = r_2 \text{ 이므로 } r_3 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_2 \text{ 이런 과정을 반복하면}$$

$$r_4 = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_3$$

$\vdots$

$$r_{n+1} = \left(\frac{1}{1+t}\right)r_n$$

따라서 수열 $\{r_n\}$ 의 공비는 $\frac{1}{1+t}$, $r_1=1$ 이다.

그러므로 $r_n = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{n-1}$ 이다.

즉, $s_n = (r_n)^2 = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{2n-2}$ 이다.

(2) 상수 $\alpha = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} \frac{P_{2023}}{Q_{2023}} + \frac{Q_{2021}}{P_{2021}} &= \frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2022}}{\alpha+\cdots+\alpha^{2021}} + \frac{\alpha+\cdots+\alpha^{2019}}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}} \\ &= \frac{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}}{\alpha+\cdots+\alpha^{2021}} + \frac{\alpha^{2021}+(\alpha+\cdots+\alpha^{2019})}{1+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2020}} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \alpha \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 삼각형 AOB 에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로, $t = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ 이고

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \text{이다.}$$

따라서, $\alpha = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 $\frac{1}{\alpha} + \alpha = 5 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 이다.

(3) (2)에서와 같이 임의의 자연수 n 에 대하여

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

이 성립함을 알 수 있고 $\alpha \neq 1$ 이므로 $\alpha + \frac{1}{\alpha} > 2$ 임을 알 수 있다.

이제 수학적 귀납법을 사용하여 다음의 명제를 모든 자연수 n 에 대해 보이자.

$$p(n): \frac{P_{2n+1}}{n+1} > \frac{Q_{2n+1}}{n} \text{ 이 성립한다.}$$

$n=1$ 일 때, $\frac{P_3}{2} = \frac{1+\alpha^2}{2}$ 이고 $\frac{Q_3}{1} = \alpha$ 이므로, 주어진 명제는 $\frac{1+\alpha^2}{2} > \alpha$ 와 동일하고, 이는 $(\alpha-1)^2 > 0$ 으로부터 얻어진다. 즉 $p(1)$ 이 성립한다.

이제 $p(k)$ 가 성립한다고 가정하자. 그러면, $\frac{P_{2k+1}}{k+1} > \frac{Q_{2k+1}}{k}$ 이 성립한다. 이때,

$$\begin{aligned} \frac{P_{2k+3}}{k+2} - \frac{Q_{2k+3}}{k+1} &> \frac{Q_{2k+3}}{k+2} \left(2 - \frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}\right) - \frac{Q_{2k+3}}{k+1} \\ &= \frac{kQ_{2k+3}}{(k+2)P_{2k+1}} \left(\frac{P_{2k+1}}{k+1} - \frac{Q_{2k+1}}{k}\right) > 0 \\ (\because \frac{P_{2k+3}}{Q_{2k+3}} &= \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}} > 2 - \frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}) \end{aligned}$$

이 성립하므로, $p(k+1)$ 이 성립함을 알 수 있다. 따라서, 수학적 귀납법에 의해 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대해 성립한다는 사실을 도출할 수 있고, 특히 $n=1011$ 일 때 $\frac{P_{2023}}{1012} > \frac{Q_{2023}}{1011}$ 이 성립한다고 결론지을 수 있다.

[62]

(1) 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 $a \leq b \leq c$ 라고 가정하고 공차가 d 인 등차수열의 연속하는 세 항이라고 하면, $b = a+d$ 와 $c = a+2d$ 이다. 이때, 문제의 조건 $c = a+2d \leq 100$ 으로부터 $a \leq 100-2d$ 를 얻는다. 또한, 삼각형의 세 변이 만족해야하는 부등식 $a+b > c$ 으로부터 $a+(a+d) > a+2d$ 를 얻을 수 있고, $2a+d \geq a+2d+1$ 이 성립한다. 따라서, 다음의 부등식을 얻는다.

$$d+1 \leq a \leq 100-2d \quad (*)$$

이로부터 $d+1 \leq 100-2d$ 가 성립하고, $0 \leq d \leq 33$ 을 얻는다. 이를 만족하는 각각의 d 에 대해 (*) 를 만족하는 a 값의 개수는 $(100-2d)-d = 100-3d$ 이다.

따라서 문제의 삼각형의 개수는

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^{33} (100-3d) &= 100 \times 34 - \frac{3 \times 34 \times 33}{2} \\ &= 1717 \end{aligned}$$

이다.

(2) 삼각형의 세 변이 길이 a, b, c 가 $a \leq b \leq c$ 라고 가정하고 공비가 r 인 등비수열의 연속하는 세 항이라고 하면, 실수 $r \geq 1$ 에 대해 $b = ar$ 와 $c = ar^2$ 이다. 삼각형 세 변의 조건으로

부터 부등식 $a+b > c$ 를 얻는다. 이 부등식은 $a+ar > ar^2$ 이므로, $r^2-r-1 < 0$ 을 얻는다. 따라서, r 의 범위

$$1 \leq r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

를 얻을 수 있다. 여기서 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots$ 이다.

(가) 먼저 $r=1$ 일 때, $a=b=c$ 는 등비수열을 이루므로, $1 \leq a=b=c \leq 100$ 의 총 100가지 경우가 존재한다.

(나) 이제 $r \neq 1$, 즉 $1 < r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이라고 가정하자. 자연수 a 에 대하여 ar 도 자연수이므로 $r = \frac{q}{p}$ 라고 둘 수 있다 (여기서 p 와 q 는 $2 \leq p < q$ 를 만족하는 서로소인 자연수). 또, $ar^2 = \frac{aq^2}{p^2}$ 도 자연수이므로, 어떤 자연수 A 에 대해 $a = p^2 A$ 임을 알 수 있다. 이때, 문제의 조건으로부터 $p^2 \leq p^2 A = a \leq 100$ 를 얻게 되고 $p \leq 10$ 을 얻을 수 있다. $p=10$ 인 경우, $a=100$ 이 되고 $b=ar > 100$ 이 되어 가능하지 않다.

따라서 가능한 p 의 값은 다음과 같다.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

각각의 p 에 대해 $r = \frac{q}{p} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 를 만족하고 $ar^2 = Aq^2 \leq 100$ 이 되는 q 의 값을 구한 뒤, 각각의 순서쌍 (p, q) 에 대해 A 는 $1 \leq A \leq \frac{100}{q^2}$ 를 만족하므로, 가능한 A 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(p, q)	(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)
가능한 A 의 개수	11	6	4	2	2	1
(p, q)	(6, 7)	(7, 8)	(7, 9)	(7, 10)	(8, 9)	(9, 10)
가능한 A 의 개수	2	1	1	1	1	1

이들의 합은 33이므로, 문제에서 구하고자 하는 삼각형의 개수는 $100 + 33 = 133$ 가지이다.

(3) 자연수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열의 연속하는 세 항이라고 하면, $2b = a + c$ 가 성립한다.

이 세 수를 일렬로 나열하는 방법은 다음과 같이 6가지가 존재한다.

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

이 순서대로 등비수열의 연속하는 세 항이 되는 조건을 고려하자.

만약, abc 가 등비수열을 이룬다면 cba 도 등비수열을 이룬다. 마찬가지로 acb 가 등비수열을 이룬다면 bca 도 등비수열을 이루고, cab 가 등비수열을 이룬다면 bac 도 등비수열을 이룬다. 따라서, abc, acb, cab 가 등비수열을 이루는 경우만 고려하면 된다.

(가) abc 순서대로 등비수열을 이룬다면 $b^2 = ac$ 이다. 이로부터 $4ac = 4b^2 = (a+c)^2$ 을 얻게

되고, $(a-c)^2=0$ 을 얻게 된다. 따라서, $a=b=c$ 이고, 이 경우의 가짓수는 200가지이다.

(나) acb 순서대로 등비수열을 이룬다면 $c^2=ab$ 이다. 이로부터 $a(a+c)=2ab=2c^2$ 을 얻게 되고, $(a-c)(a+2c)=a^2+ac-2c^2=0$ 이 되어, $a=c$ 또는 $a=-2c$ 이다. $a=c$ 인 경우, $a=b=c$ 를 얻게 되어 이미 고려되었다. $a=-2c$ 인 경우 $c=-2b$ 가 되어 $a:b:c=4:1:-2$ 가 된다. 이 경우의 가짓수는 $2 \times \frac{100}{4}=50$ 가지이다.

(다) cab 순서대로 등비수열을 이룬다고 가정하자. abc 가 등차수열을 이루므로, cba 도 등차수열을 이룬다. 이 경우, (나)에 의해 $c:b:a=4:1:-2$ 가 되어 즉, $a:b:c=-2:1:4$ 가 되어, 이 경우의 가짓수는 마찬가지로 50가지이다.

(가), (나), (다)의 세 경우를 모두 합하면, 300개의 순서쌍이 존재함을 알 수 있다.

[63]

(1) <제시문 1>로부터 다음을 알 수 있다. (단, k 는 정수)

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos x & n=4k \text{ 일 때} \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x & n=4k+1 \text{ 일 때} \\ \cos(x+\pi) = -\cos x & n=4k+2 \text{ 일 때} \\ \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x & n=4k+3 \text{ 일 때} \end{cases}$$

또한

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ 일 때}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\sin x < 0, -1 < -\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (*)$$

이고 $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \dots$ 이므로 주어진 식 $\cos\left(x + \frac{nx}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 이 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 해를 가지려면 $n=4k+3$ (k 는 정수)를 만족해야 한다. 따라서 조건을 만족하는 양의 정수 n 의 개수는 $1 \leq 4k+3 \leq 2023$ 을 만족하는 정수의 개수와 같으므로 정답은 506이다.

(2) 위의 식에 의해 $\cos\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$ 와 $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ 는 각각 $\pm \cos x$, $\pm \sin x$ 중의 하나와 같다. 따라서 $t = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ 라 하면 $\cos^2\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)$ 은 $\cos^2 x$ 또는 $\sin^2 x$ 이므로 t^2 또는 $1-t^2$ 이 된다.

(1) $\cos^2\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) = t^2$ 인 경우

이 경우 주어진 식 $6\cos^2(x + \frac{m\pi}{2}) + \cos(x + \frac{n\pi}{2}) - 5 = 0$ 은 $6t^2 + t - 5 = (6t - 5)(t + 1) = 0$ 가 되고 이 식의 해는 $t = -1$ 과 $t = \frac{5}{6}$ 이다. 그런데 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 일 때 (*)에 의해 $t = -1$ 이 될 수 없으므로 해를 가지려면 $t = \frac{5}{6}$ 이 되어야 한다. 그러면 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{6} < 1$ 이므로 (*)에 의해 $t = \cos(x + \frac{n\pi}{2}) = \cos x$ 가 되어야 한다. $n = 4k$ (k 는 정수)이다. 또한 $\cos^2(x + \frac{m\pi}{2}) = t^2 = \cos^2 x$ 이므로 $\cos(x + \frac{m\pi}{2}) = \pm \cos x$ 가 되어 $m = 4s$ 또는 $m = 4s + 2$ (s 는 정수)을 얻는다. 이 경우 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $11 \cdot 5 = 55$ 이다.

(2) $\cos^2(x + \frac{m\pi}{2}) = 1 - t^2$ 인 경우

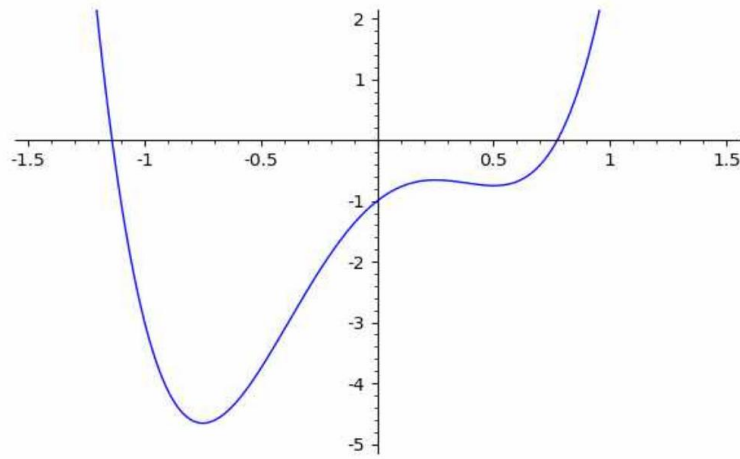
이 경우 주어진 식 $6\cos^2(x + \frac{m\pi}{2}) + \cos(x + \frac{n\pi}{2}) - 5 = 0$ 은 $6(1 - t^2) + t - 5 = -(2t - 1)(3t + 1) = 0$ 이 되고 이 식의 해는 $t = \frac{1}{2}$ 과 $t = -\frac{1}{3}$ 이다. 주어진 조건 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 일 때 이러한 해를 가지려면 (*)에 의해 $t = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ 는 $\sin x$ 또는 $-\sin x$ 가 되어야 한다. 따라서 $n = 4k + 1$ 또는 $n = 4k + 3$ (k 는 정수)이다. 또한 $\cos^2(x + \frac{m\pi}{2}) = 1 - t^2 = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ 이므로 $\cos(x + \frac{m\pi}{2}) = \pm \cos x$ 가 되어 $m = 4s$ 또는 $m = 4s + 2$ (s 는 정수)을 얻는다. 이 경우 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $11 \cdot 12 = 132$ 이다. 위 두 가지 경우에 의해 가능한 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $55 + 132 = 187$ 이다.

(3) 편의상 $t = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $f(t) = 8t^4 - 7t^2 + 3t - 1$ 라 하자. 그러면 t 는 $-1 \leq t \leq 1$ 을 만족하고 주어진 식은 $f(t) = 0$ 로 표현된다. 이 식의 해가 존재하는지 판별하기 위해 함수 $y = f(t)$ ($-1 \leq t \leq 1$)의 그래프의 개형을 알아보자. 이를 위해 우리는 $f'(t)$ 의 근을 구해야 한다. 만약 $f'(t) = 32t^3 - 14t + 3$ 이 인수분해가 된다면 최고차항의 약수 a 와 상수항의 약수 b 에 대하여 $f'(t)$ 는 $at - b$ 로 나누어 질 것이다. 여기서 $a = 2$, $b = 1$ 로 두면 $f'(b/a) = f'(1/2) = 4 - 7 + 3 = 0$ 이므로 실제로 $f'(t)$ 는 $2t - 1$ 로 나누어진다. 다항식의 나눗셈을 이용하여 우리는

$f'(t) = 32t^3 - 14t + 3 = (2t - 1)(16t^2 + 8t - 3) = (2t - 1)(4t + 3)(4t - 1)$ 을 얻을 수 있다. 따라서 $f'(t)$ 의 근은 $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ 이고 $f(t)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이므로 $f(t)$ 는 구간 $(-\infty, -\frac{3}{4}]$ 에서 감소, 구간 $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$ 에서 증가, 구간 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 에서 감소, 구간 $[\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 증가한다. 또한 $f(-1) = 8 - 7 - 3 - 1 = -3 < 0$,

$$f(-\frac{3}{4}) = \frac{8 \cdot 3^4}{4^4} - \frac{7 \cdot 9}{16} - \frac{9}{4} - 1 < 0, \quad f(\frac{1}{4}) = \frac{8}{4^4} - \frac{7}{16} + \frac{3}{4} - 1 < 0,$$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2} - 1 < 0$, $f(1) = 8 - 7 + 3 - 1 = 3 > 0$ 이므로 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 아래와 같이 그려진다.



따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 일 때 $f(t) = 0$ 의 해는 구간 $[\frac{1}{2}, 1]$ 에서 유일하게 존재한다. 또한 $f(t)$ 는 이 구간에서 증가하고 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 - \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -\frac{5}{2} + 2.12 \dots < 0$ 이므로 해는 구간 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ 에 존재한다. 그런데 $t = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ 이고 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1$, $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-1 < -\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < -\sin x < 0$ 이므로 주어진 식이 해를 가지려면 $n = 4k$ (k 는 정수)를 만족해야 한다. 따라서 조건을 만족하는 양의 정수 n 의 개수는 505이다.

[64]

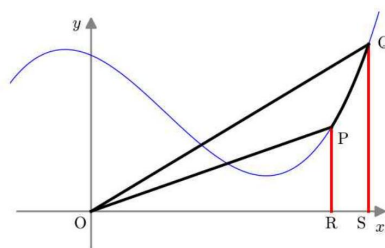
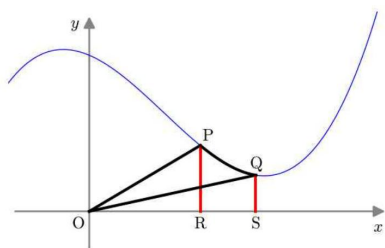
(1) 다항식의 정적분이므로 다음과 같이 계산된다.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx \right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

(2) 이 문제에서는 $f(t) \geq 0$ 을 가정하자. ($f(t) < 0$ 인 경우도 비슷하게 할 수 있다.) 편의상 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = t$, $x = t + h$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 r 이라 하자. 그러면 $r = \int_t^{t+h} f(x) dx$ 이다. 먼저 <제시문 2>에서 주어진 도형의 넓이 $p(h)$ 에 대한 식을 찾기 위해 $t \geq 0$ 인 경우와 $t < 0$ 인 경우를 나누어 생각하자.

(1) $t \geq 0$ 인 경우

아래 그림과 같이 P, Q 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 R, S 라 하자. (선분 OQ 와 선분 OP 의 기울기에 따라 두 가지 경우가 있다.)

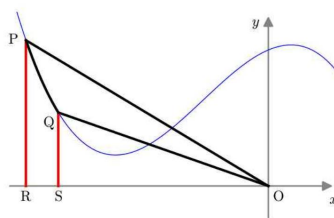
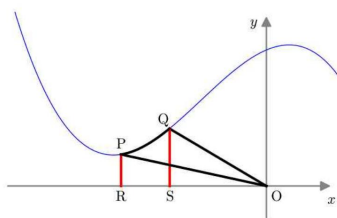


위의 그림에서 볼 수 있듯이 넓이 $p(h)$ 는 $\triangle OPR+r$ 과 $\triangle OQS$ 의 차이와 같으므로 $p(h) = |\triangle OQS - \triangle OPR - r|$ 이다. 또한 $t \geq 0$ 이므로 $\triangle OPR = -\frac{1}{2}tf(t)$ 와

$\triangle OQS = \frac{1}{2}(t+h)f(t+h)$ 이 되어 $p(h) = \left| \frac{1}{2}(t+h)f(t+h) - \frac{1}{2}tf(t) - r \right|$ 을 얻는다.

(2) $t < 0$ 인 경우

경우 (1)과 마찬가지로 아래와 같은 그림을 생각하자.



위의 그림에서 볼 수 있듯이 $p(h)$ 는 $\triangle OQS+r$ 과 $\triangle OPR$ 의 차이와 같으므로 $p(h) = |\triangle OPR - \triangle OQS - r|$ 이다. 또한 $t < 0$ 이므로 $\triangle OPR = -\frac{1}{2}tf(t)$ 와

$\triangle OQS = -\frac{1}{2}(t+h)f(t+h)$ 이 되어 경우 (1)과 똑같은 식인

$p(h) = \left| \frac{1}{2}(t+h)f(t+h) - \frac{1}{2}tf(t) - r \right|$ 을 얻는다.

위 두 가지 경우로부터 항상

$$p(h) = \left| \frac{1}{2}(t+h)f(t+h) - \frac{1}{2}tf(t) - r \right| = \left| \frac{t}{2}(f(t+h) - f(t)) + \frac{h}{2}f(t+h) - \int_t^{t+h} f(x)dx \right|$$

이 되고 따라서

$$A(t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{p(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \left| \frac{t}{2} \cdot \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + \frac{f(t+h)}{2} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x)dx \right| \text{을 얻는다.}$$

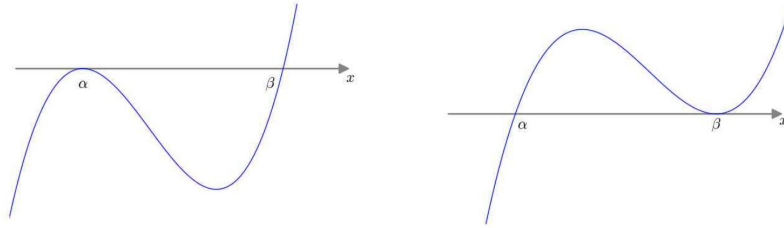
함수의 정의에 의해 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$ 이고 $f(x)$ 는 연속이므로

$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(t+h)}{2} = \frac{f(t)}{2}$ 이다. 또한 $F(x)$ 를 $f(x)$ 의 한 부정적분이라 하면

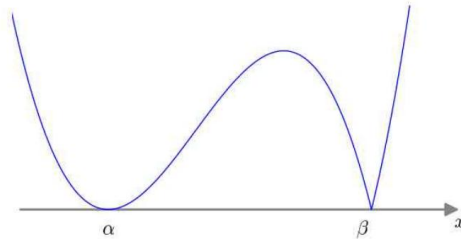
$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = F'(t) = f(t) \text{가 된다.}$$

$$A(t) = \left| \frac{t}{2}f'(t) + \frac{1}{2}f(t) - f(t) \right| = \frac{1}{2} |tf'(t) - f(t)| \text{을 얻는다.}$$

(3) 편의상 $g(t) = \frac{1}{2}(tf'(t) - f(t))$ 라 하자. 그러면 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 이므로 $g(t) = at^3 + \frac{b}{2}t^2 - \frac{d}{2}$ 이다. 또한 $A(t) = |g(t)|$ 이므로 $A(t) = 0$ 와 $g(t) = 0$ 은 같은 근을 갖고 문제의 조건에 따라 $g(t) = 0$ 도 두 개의 실근 α, β 를 갖는다. $g(t)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고 근을 두 개 가지므로 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형이 아래 두 그림 중 하나가 된다.



그런데 $A(t) = |g(t)|$ 가 β 에서 미분가능하지 않으므로 $y = g(x)$ 의 그래프는 첫 번째 형태가 되고 $y = A(x)$ 의 그래프는 아래와 같이 그려진다.



따라서 $g(t) = a(t - \alpha)^2(t - \beta) = a(t^3 - (2\alpha + \beta)t^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)t - \alpha^2\beta)$ 로 쓸 수 있다. 이 식의 일차항과 $g(t) = at^3 + \frac{b}{2}t^2 - \frac{d}{2}$ 의 일차항을 비교하면 $a(\alpha^2 + 2\alpha\beta) = 0$ 을 얻는다. 또한 두 식의 상수항을 비교해보면 $a\alpha^2\beta = \frac{d}{2} > 0$ 이므로 $a\alpha \neq 0$ 이고 따라서 $a(\alpha^2 + 2\alpha\beta) = 0$ 의 양변을 $a\alpha$ 로 나누어 $\alpha = -2\beta$ 를 얻는다.

위의 $y = A(x)$ 의 그래프를 보면 $A(t)$ 는 유일한 극댓값을 가지고 이 극댓값은 $\alpha < t < \beta$ 범위에서 얻어지므로 $g(t)$ 은 이 범위에서 극솟값 -16 을 갖는다. 이 극솟값은 $t = \frac{\alpha + 2\beta}{3} = 0$ 에서 얻어지므로 $g(0) = -a\alpha^2\beta = -4a\beta^3 = -16$, 즉 $a\beta^3 = 4$ 를 얻는다.

조건 $\int_0^{2\beta} A(t)dt = 38$ 에서 $\int_0^{2\beta} A(t)dt = \int_0^{2\beta} |g(t)|dt = -\int_0^{\beta} g(t)dt + \int_{\beta}^{2\beta} g(t)dt$ 이다. 그런데 $g(t) = a(t + 2\beta)^2(t - \beta) = a(t^2 + 4\beta t + 4\beta^2)(t - \beta) = a(t^3 + 3\beta t^2 - 4\beta^3)$ 이므로 $-\int_0^{\beta} g(t)dt + \int_{\beta}^{2\beta} g(t)dt = -a\left[\frac{t^4}{4} + \beta t^3 - 4\beta^3 t\right]_0^{\beta} + a\left[\frac{t^4}{4} + \beta t^3 - 4\beta^3 t\right]_{\beta}^{2\beta} = \frac{19a\beta^4}{2} = 38$ 이 되어 $a\beta^4 = 4$ 을 얻는다. 이 식과 위에서 찾은 식 $a\beta^3 = 4$ 을 이용하면 $\beta = 1$ 과 $a = 4$, 그리고 $\alpha = -2\beta = -2$ 가 된다.

(4) $g(t) = at^3 + \frac{b}{2}t^2 - \frac{d}{2}$ 에서 위의 결과 $g(t) = 4t^3 + 12t^2 - 16$ 을 이용하면 $a = 4$, $b = 24$,

$d=32$ 이 된다. 주어진 조건과 (1)로부터 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 1 + 8 + \frac{c}{2} + 32 = 23$ 이므로 $c=-36$ 을 얻는다.

<1>

(1) $k=0$ 일 때, 직선 ℓ 은 점 $(0,0)$ 을 지나고 기울기가 1이 되므로, 직선 ℓ 의 방정식은 $y=x$ 가 된다. 따라서 $A(0)$ 은 곡선 $y=x-x^2$, 직선 $y=x$, 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 다음과 같은 정적분의 값으로 주어진다. $\square\square\square\square\square\square\square$

$$A(0) = \int_0^1 (x - (x - x^2))dx = \frac{1}{3}$$

한편, $k=0$ 일 때, 직선 ℓ 과 곡선 $y=x^2-x$ 이 만나는 점 중에서 1사분면에 있는 점의 좌표는 $(2,2)$ 가 된다. 따라서 $B(0)$ 은 곡선 $y=x^2-x$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 영역 중에서 직선 $x=1$ 의 오른쪽에 있는 부분의 넓이이므로 다음과 같은 정적분의 값으로 주어진다. $\square\square\square\square$

$$\square \quad B(0) = \int_1^2 (x - (x^2 - x))dx = \frac{2}{3}$$

따라서 $A(0) : B(0) = 1 : 2$ 가 된다.

(2) 직선 ℓ 은 점 $(k, k-k^2)$ 를 지나고, 기울기가 $1-2k$ 이므로, 직선 ℓ 의 방정식은 $y=(1-2k)(x-k)+k-k^2$ 과 같게 된다. 이제 직선 ℓ 의 방정식과 $y=x^2-x$ 를 연립해서 풀자. 연립방정식의 두 해의 x 좌표 중에서 양수인 경우만을 택하면, $\alpha=1-k+\sqrt{1-2k+2k^2}$ 이 되고, 이 값은

$$1-k+\sqrt{1-2k+2k^2}=1-k+\sqrt{(1-k)^2+k^2}>1-k+\sqrt{k^2}=1$$

이 되므로, 항상 1보다 커짐을 알 수 있다. 따라서 $B(k)$ 는 곡선 $y=x^2-x$ 와 직선 ℓ 로 둘러싸인 영역 중에서 직선 $x=1$ 의 오른쪽에 있는 부분의 넓이이므로, 다음과 같은 정적분의 값으로 주어진다.

$$\begin{aligned} B(k) &= \int_1^\alpha ((1-2k)(x-k)+k-k^2 - (x^2-x))dx = \int_1^\alpha (k^2+2x-2kx-x^2)dx \\ &= k^2(\alpha-1) + (1-k)(\alpha^2-1) - \frac{1}{3}(\alpha^3-1) \end{aligned}$$

위의 값은 k 와 α 에 대한 다항식의 형태임을 알 수 있다.

(3) (2)의 풀이로부터,

$\alpha=1-k+\sqrt{1-2k+2k^2}$ 이고, $B(k)=k^2(\alpha-1)+(1-k)(\alpha^2-1)-\frac{1}{3}(\alpha^3-1)$ 로 주어진다.

$k=\frac{1}{n}$ 을 위 식에 대입하면, $\alpha=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-2n+2}$ 가 되고, $B\left(\frac{1}{n}\right)$ 을 $\square$ 에 대한 다항식 형태로 정리하면,

$$B\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{3}\alpha^3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha^2 + \frac{1}{n^2}\alpha - \frac{2}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

이 된다. 이제 $\alpha = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 2n + 2}$ 를 위 식에 대입해서 정리하면,

$$B\left(\frac{1}{n}\right) = C + D\sqrt{n^2 - 2n + 2} \quad (C \text{와 } D \text{는 각각 유리수})$$

의 형태가 된다. 여기서 구체적으로 D 를 구하면,

$$D = \frac{2}{3n} - \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{3n^3} = \frac{2}{3n^3}(n^2 - 2n + 2) = \frac{2}{3n^3}((n-1)^2 + 1) > 0$$

이 되므로, D 는 항상 양수가 됨을 보일 수 있다.

<2>

(1) 조건 $f(Ax) = Af(x)$ 로부터, 점 (a, b) 가 그래프 $y = f(x)$ 의 위에 있다면 점 (Aa, Ab) 도 역시 그래프 $y = f(x)$ 의 위에 있어야 한다는 사실을 알 수 있다.

정적분 $\int_1^3 f(x)dx$ 의 값은 밑변의 길이가 2이고 높이가 1인 삼각형의 넓이이므로, 그 값은

1이다. 따라서, 닫힌 구간 $[3, 9]$ 에서의 정적분 $\int_3^9 f(x)dx$ 의 값은 밑변의 길이가 6이고 높

이가 3인 삼각형의 넓이이므로 그 값은 9이다. 마찬가지로 $\int_2^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$ 이므로, $\square$

$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = \frac{1}{18}$ 이다. 따라서, $\int_{\frac{2}{3}}^9 f(x)dx = 1 + 9 + \frac{1}{18} = \frac{181}{18}$ 이다.

(2) 삼차함수 $g(x) = x^3 - 9x^2 + 18x = x(x-3)(x-6)$ 는 세 개의 $x = 0, 3, 6$ 해를 가지고, $g'(x) = 3(x^2 - 6x + 6)$ 이므로 $x = 3 - \sqrt{3}$ 에서 극댓값, $x = 3 + \sqrt{3}$ 에서 극솟값을 가진다.

한편, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 정수 k 에 대해 $x = 2^k$ 에서 극솟값 $\square$ 을 가지고,

$x = \frac{1}{2}(2^k + 2^{k+1})$ 에서 극댓값 $x = 2^{k+1}$ 을 가진다.

닫힌 구간 $[1, 100]$ 을 $[1, 2), [2, 4), [4, 8), [8, 16), [16, 32), [32, 64), [64, 100]$ 으로 나누어서 생각하자.

(a) 구간 $[1, 2)$ 와 $[2, 4)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 각각 $\frac{1}{2}, 1$ 이고 $1 < 3 - \sqrt{3}$ 이므로, $(g \circ f)(x)$ 의 극솟값은 $x = 1, 2$ 에서 발생한다. 즉, 각 구간에서 극솟값이 한 번씩 발생한다.

(b) 구간 $[4, 8), [8, 16)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 각각 2, 4이고 $3 - \sqrt{3} < 2, 4 < 3 + \sqrt{3}$ 이므로, $(g \circ f)(x)$ 의 극솟값은 $x = 4, 6, 8, 12$ 에서 발생한다. 즉, 각 구간에서 극솟값이 두 번씩 발생한다.

(c) 구간 $[16, 32)$, $[32, 64)$, $[64, 128)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 각각의 최댓값은 $3 + \sqrt{3}$ 보다 크므로, $(g \circ f)(x)$ 의 극솟값은 각 구간에서 3번씩 발생한다.

하지만, $x = 100$ 에서의 함수값 $f(100) = 64f\left(\frac{100}{64}\right) = 64 \times \frac{7}{16} = 28 > 3 + \sqrt{3}$ 이므로, 마지막 닫힌 구간 $[64, 100]$ 에서는 극솟값이 2번 발생한다.

(a),(b),(c)를 종합하면, 극솟값은 $2 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 2 = 14$ 번 발생한다.

(3) $a_1 = a = \frac{B(A-1)}{2}$ 라고 두면, $a_n = a(A^2)^{n-1}$ 이 된다. $\log_3 a_n = \log_3 a + 2(n-1)\log_3 A$ 의 값이 항상 정수이므로, $\log_3 a = P$ 와 $2\log_3 A = Q$ 의 값 모두 정수이다.
문제의 첫 번째 조건으로부터

$$\sum_{n=1}^6 \log_3 a_n = 6\log_3 a + 15 \times 2\log_3 A = 6P + 15Q = 117$$

이므로, 식 $2P + 5Q = 39$ 를 얻을 수 있다.

또한, 문제의 두 번째 조건으로부터

$$\log_3 \left(\sum_{n=1}^6 a_n \right) = \log_3 \left(a \frac{A^{12}-1}{A^2-1} \right) = P + \log_3 \left(\frac{A^{12}-1}{A^2-1} \right) = P + 5Q + \log_3 \left(\frac{1 - \frac{1}{A^{12}}}{1 - \frac{1}{A^2}} \right)$$

을 얻을 수 있다. $2\log_3 A = Q$ 가 0보다 큰 정수이므로, $2\log_3 A \geq 1$ 이 되어 $A^2 \geq 3$ 이다.

따라서, $1 < \frac{1 - \frac{1}{A^{12}}}{1 - \frac{1}{A^2}} < \frac{3}{2}$ 이므로 $0 < \log_3 \left(\frac{1 - \frac{1}{A^{12}}}{1 - \frac{1}{A^2}} \right) < 1$ 이 되어, 식 $P + 5Q = 37$ 을 얻을

수 있다. 이 두 식을 연립하면, 해 $(P, Q) = (2, 7)$ 을 얻을 수 있다.

이로부터, $A = 3^{\frac{7}{2}} = 27\sqrt{3}$ 와 $B = \frac{18}{27\sqrt{3}-1}$ 를 얻게 되어, 유일한 순서쌍

$(A, B) = \left(27\sqrt{3}, \frac{18}{27\sqrt{3}-1} \right)$ 를 얻을 수 있다.

<3>

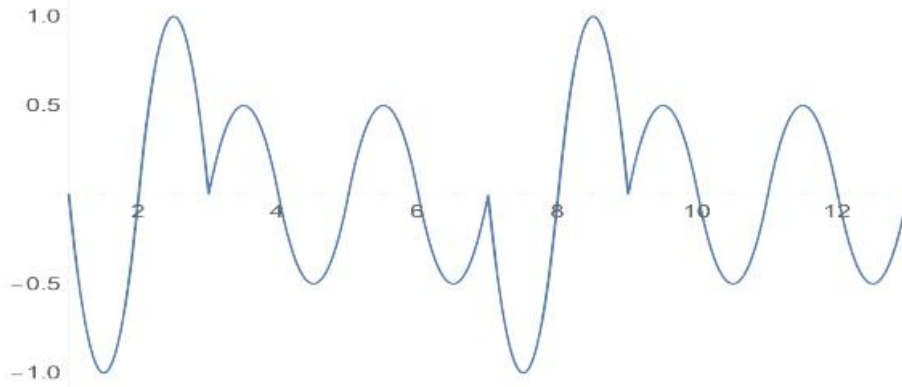
(1) $1 \leq n \leq 20$ 에 대하여, 수열 a_n 의 값과 $f(n)$ 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	6	3	4	5	2	1	6	3	4	5	2	1	6	3	4	5	2	1	6
$f(n)$	-4	4	2	-2	2	-2	-4	4	2	-2	2	-2	-4	4	2	-2	2	-2	-4	4

한편, $1 \leq x < 7$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 의 구체적인 표현은 아래와 같다.

$$h(x) = \begin{cases} -4g(x-1), & 1 \leq x < 2 \\ 4g(x-2), & 2 \leq x < 3 \\ 2g(x-3), & 3 \leq x < 4 \\ -2g(x-4), & 4 \leq x < 5 \\ 2g(x-5), & 5 \leq x < 6 \\ -2g(x-6), & 6 \leq x < 7 \end{cases}$$

$g(x-m)$ 의 그래프는 $g(x)$ 의 그래프를 x 축으로 m 만큼 평행 이동하여 얻어지고,
 $h(x) = h(x-6)$ 이므로, 함수 $h(x)$ 의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



(2) $y = g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 기울기는 1이고, $x=1$ 에서의 기울기는 -1이다. $y = g(x-m)$ 의 그래프는 $g(x)$ 의 그래프를 x -축으로 m 만큼 평행 이동하여 얻어지므로, $y = g(x-m)$ 의 $x=m$ 에서의 기울기는 1이고, $x=m+1$ 에서의 기울기는 -1이 된다.

또한 $y = c \cdot g(x-m)$ 의 $x=m$ 에서의 기울기는 c 이고, $x=m+1$ 에서의 기울기는 $-c$ 가 된다.

이제, 풀이 (i)에 주어진 구간 $1 \leq x < 7$ 에서의 함수 $h(x)$ 와 $h(x) = h(x+6)$ 로부터, $h(x)$ 의 미분불가능한 점은

$$x = 3 + 6k, x = 7 + 6k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

에서 발생함을 알 수 있다. 따라서, 구간 $1 < x < 100$ 에서 $h(x)$ 의 미분불가능한 점은

$$x = 3 + 6k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 16), \quad x = 7 + 6k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 15)$$

이므로, 이들의 총 개수는 $17 + 16 = 33$ 개가 된다.

(3) 모든 실수 x 에 대하여, $h(x) = h(x+6)$ 이므로, 다음의 등식이 성립한다. $\square$

$$\int_1^7 h(x)dx = \int_{1+6k}^{7+6k} h(x)dx$$

위의 등식으로부터, 정적분 $\int_1^{100} h(x)dx$ 의 값은 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다. $\square$

$$\begin{aligned} \int_1^{100} h(x)dx &= \int_1^7 h(x)dx + \int_7^{13} h(x)dx + \dots + \int_{91}^{97} h(x)dx + \int_{97}^{100} h(x)dx \\ &= 16 \int_1^7 h(x)dx + \int_1^4 h(x)dx \end{aligned}$$

한편, 풀이 (i)에 주어진 $1 \leq x < 7$ 일 때, 함수 $h(x)$ 의 구체적인 표현식으로부터, $\square$

$\int_1^7 h(x)dx$ 의 값과 $\int_1^4 h(x)dx$ 의 값은 다음과 같이 계산된다. $\square$

$$\begin{aligned} \int_1^7 h(x)dx &= \int_1^2 (-4)g(x-1)dx + \int_2^3 4g(x-2)dx + \int_3^4 2g(x-3)dx + \int_4^5 (-2)g(x-4)dx \\ &\quad + \int_5^6 2g(x-5)dx + \int_6^7 (-2)g(x-6)dx \\ &= ((-4) + 4 + 2 + (-2) + 2 + (-2)) \int_0^1 g(t)dt = 0 \\ \int_1^4 h(x)dx &= \int_1^2 (-4)g(x-1)dx + \int_2^3 4g(x-2)dx + \int_3^4 2g(x-3)dx \\ &= ((-4) + 4 + 2) \int_0^1 g(t)dt = 2 \int_0^1 (t - t^2)dt = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서, 정적분 $\int_1^{100} h(x)dx$ 의 값은 $\frac{1}{3}$ 이 된다.

[68]

(1) 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $Q(c, f(c))$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 Q 를 지나고 직선을 ℓ 이라 하자. 이 직선 ℓ 이 점 $P(a, b)$ 를 지난다는 것을 보이면 된다. 직선 ℓ 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{f'(c)}(x - c) + f(c)$$

이므로 다음을 만족함을 보이면 된다.

$$b = -\frac{1}{f'(c)}(a - c) + f(c) \dots\dots\dots (*) (*)$$

이제 곡선 위의 점 $(x, f(x))$ 에서 점 P까지의 거리의 제곱을

$$g(x) = (x-a)^2 + (f(x)-b)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + f(x) \cdot f(x) - 2bf(x) + b^2$$

이라 하자. 그러면 미분가능한 함수 $g(x)$ 는 $x=c$ 에서 최솟값을 가지므로 극소가 된다. 그러므로 도함수

$$g'(x) = 2x - 2a + f'(x)f(x) + f(x)f'(x) - 2bf'(x) = 2(x-a) + 2f'(x)(f(x)-b)$$

는 $g'(x)=0$ 을 만족한다. 따라서

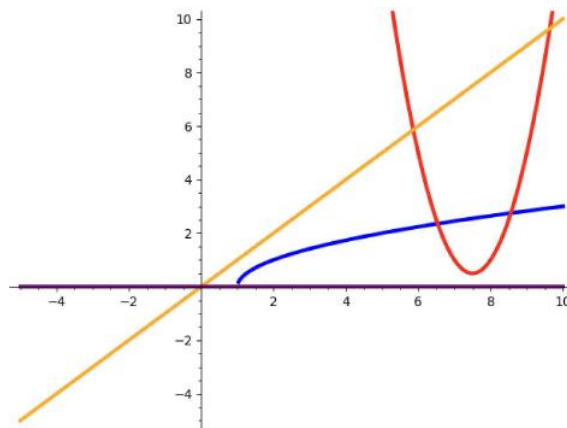
$$2(c-a) + 2f'(c)(f(c)-b) = 0$$

을 얻는다. 이 식은 식 (*)과 같으므로 직선 ℓ 은 점 P를 지난다.

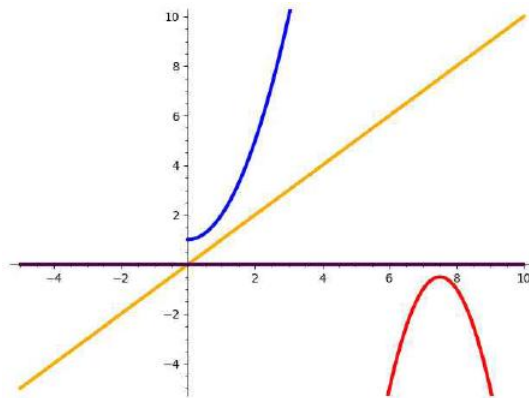
참고: 만약 $f'(c)=0$ 인 경우 위에서 얻은 식 $2(c-a) + 2f'(c)(f(c)-b) = 0$ 로부터 $a=c$ 가 되고 직선 ℓ 의 방정식은 $x=c$ 가 된다. 따라서 이 경우에도 직선 ℓ 은 점 P를 지난다.

(2) 점 Q에서 곡선 $y=g(x)$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 Q를 지나는 직선을 ℓ_1 이라 하고 점 R에서 곡선 $y=h(x)$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 R를 지나는 직선을 ℓ_2 라 하자. 점 Q를 고정하고 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 중에서 점 Q까지의 거리가 최소인 점을 R이라고 할 때, 선분 QR의 길이가 최소가 되어야 하므로 (1)에 의해 직선 ℓ_1 이 점 R을 지난다. 같은 이유로 직선 ℓ_2 는 점 Q를 지난다. 따라서 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 는 모두 직선 QR와 같으므로 점 Q에서 곡선 $y=g(x)$ 에 접하는 접선과 점 R에서 곡선 $y=h(x)$ 에 접하는 접선은 모두 직선 QR에 수직이다.

(3) 주어진 곡선과 직선의 개형을 그리면 아래와 같다.



곡선 $y = \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$)을 직선 $y=x$ 에 대해 대칭시키면 $y = x^2 + 1$ ($x \geq 0$)이 되고 곡선 $y = 2x^2 - 30x + 113$ 을 직선 $y=0$ 에 대해 대칭시키면 $y = -2x^2 + 30x - 113$ 이 된다. 이렇게 얻어진 곡선의 개형을 그리면 아래와 같다.



따라서 선분 AB, BC, CD의 길이의 합이 최소가 될 때는 점 A', B, C, D'이 한 직선 위에 있고, 선분 A'D'의 길이가 두 포물선 사이의 최소 거리가 될 때이다. 점 A(a, b)를 직선 $y=x$ 에 대해 대칭시켜 얻은 점을 A'(b, a)라 하고 점 D(c, d)를 직선 $y=0$ 에 대해 대칭시켜 얻은 점을 D'(c, -d)라 하면 주어진 조건으로부터 $c-b=6$ 을 얻는다. 또한 (2)에 의해 점 A'에서 곡선 $y=x^2+1$ 에 접하는 접선과 점 D'에서 곡선 $y=-2x^2+30x-113$ 에 접하는 접선은 서로 평행하므로 기울기가 같다. 두 접선의 기울기를 비교하면 $2b=-4c+30$ 이 되고, 이 식과 위에서 얻은 식을 연립하면 $b=1$, $c=7$ 을 얻는다. 따라서 A' = (1, 2), D' = (7, -1)이므로, 정답은 A = (2, 1), D = (7, 1)이다.

참고: 문제에서 주어진 조건 $c-b=6$ 이 없어도 다음과 같이 답을 구할 수 있다. 점 A'(b, b²+1)에서 곡선 $y=x^2+1$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 A'을 지나는 직선과 점 D' = (c, -2c²+30c-113)에서 곡선 $y=-2x^2+30x-113$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 D'을 지나는 직선은 각각 다음과 같다.

$$y = -\frac{1}{2b}(x-b)+b^2+1, \quad y = -\frac{1}{30-4c}(x-c)-2c^2+30c-113$$

이 두 직선은 일치하므로 기울기가 같고 y절편이 같음을 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$2b = -4c + 30, \quad \frac{3}{2} + b^2 = \frac{c}{30-4c} - 2c^2 + 30c - 113$$

첫 번째 식에서 얻은 $b=15-2c$ 를 두 번째 식에 대입하여 정리하면

$$-24c^3 + 540c^2 - 4059c + 10185 = -3(8c^2 - 124c + 485)(c-7) = 0$$

이 되어 $c=7$ 을 얻을 수 있다.

[69]

(1) 두 직선 L_1 , L_2 의 기울기를 k 라 하면, 두 직선의 방정식은

$$L_1 : y = kx + p, \quad L_2 : y = kx$$

이다. L_2 와 $y=x^2$ 의 교점은 B(0, 0)와 C(k, k²)이고, 이로부터 $M_2\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2}\right)$ 이다.

두 점 A, D의 x좌표를 각각 x_1 , x_2 라 하면, 이차방정식 $x^2 - kx - p = 0$ 의 해이므로

$$x_1 + x_2 = k, \quad x_1 x_2 = -p$$

와 $M_1\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2} + p\right)$ 를 얻을 수 있다. 두 점 M_1, M_2 의 x 좌표가 같고 $\overline{PM_1} = 5, \overline{PM_2} = 1$ 이므로,

$$P\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2} + 1\right), \quad \overline{M_1 M_2} = p = 6$$

이다. 직선 BP의 방정식이 $y = \left(\frac{\frac{k^2}{2} + 1}{\frac{k}{2}}\right)x = \left(\frac{k^2 + 2}{k}\right)x$ 이고, 이 직선과 그래프 $y = x^2$ 의 교점

중의 하나가 점 D이므로,

$$(x_2, kx_2 + p) = \left(\frac{k^2 + 2}{k}, \left(\frac{k^2 + 2}{k}\right)^2\right)$$

를 얻게 된다. 즉,

$$kx_2 + p = k\left(k + \frac{2}{k}\right) + 6 = k^2 + 8 = \left(\frac{k^2 + 2}{k}\right)^2$$

이고, 이를 정리하면 $k = 1$ 이다.

따라서, 점 $A(-2, 4), B(0, 0), C(1, 1), D(3, 9)$ 의 좌표를 얻게 되고, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이므로 그 넓이는

$$(5\sqrt{2} + \sqrt{2}) \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = 18$$

이다.

(2) $y = x^2$ 과 원의 교점을 x 좌표의 값이 작은 순으로 A, B, C, D라고 하자. <제시문 1>과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 P, 선분 AD의 중점을 M_1 , 선분 BC의 중점을 M_2 라고 하자.

직선 $y = kx + p$ 가 $y = x^2$ 의 두 교점의 x 좌표값의 합은 항상 k 이다. <제시문 2>의 조건으로부터 두 직선 AD와 BC가 서로 평행이고, 그 기울기를 k 라 하면, M_1 과 M_2 는 y 축과 평행한 직선 $x = \frac{k}{2}$ 위에 놓이게 된다. <제시문 2>의 조건에 의해 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로, 선분 $M_1 M_2$ 는 원의 중심을 지나게 되고 두 직선 AD와 BC는 수직이다. 따라서, $k = 0$ 이다.

이제, 점 C, D가 $y = x^2$ 위의 점이므로, $C(\sqrt{a}, a), D(\sqrt{b}, b)$ ($b > a > 0$)라 하자. 점 A, B, C, D를 지나는 원의 방정식을 $x^2 + (y - k)^2 = r^2$ 이라 하면,

$$y^2 + (1 - 2k)y + k^2 - r^2 = 0$$

의 두 근이 a, b 이므로, 근과 계수의 관계에 의해

$$a + b = 2k - 1, \quad ab = k^2 - r^2$$

이다. 따라서, $k = \frac{a+b+1}{2}, r^2 = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - ab$ 이다.

$r = 4$ 이므로 $\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - ab = 16$ 이고 <제시문 2>의 조건으로부터 $\frac{a+b+1}{2}$ 는 정수이다.

이 식을 정리하면 $(b-a)^2 + 2(a+b) = 63$ 이고 $b-a$ 는 홀수이다. 이로부터 가능한 경우는 다

음 표와 같다.

$b-a$	$b+a$	a	b
1	31	15	16
3	27	12	15
5	19	7	12

사다리꼴 ABCD의 넓이는 $(\sqrt{b} + \sqrt{a})(b-a)$ 이므로 각 경우의 넓이는 $\sqrt{16} + \sqrt{15}$, $2(\sqrt{15} + \sqrt{12})$, $5(\sqrt{12} + \sqrt{7})$ 이다.

(3) <제시문 3>의 조건과 $x_3 = \sqrt{m}$, $x_4 = \sqrt{n}$ 이므로 $g(x) = -(x^2 - m)(x^2 - n)$ 이다. $y = x^2$ 과 $y = g(x)$ 가 네 개의 점에서 만나기 위해서는 $y = -(y-m)(y-n)$, 즉

$$y^2 - (m+n-1)y + mn = 0$$

이 서로 다른 두 실근 a, b ($0 < a < b$)를 가져야 한다. 따라서,

$$D = (m+n-1)^2 - 4mn = (m-n)^2 - 2(m+n) + 1 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이다. 한편, $S(\sqrt{a}, a)$, $T(\sqrt{b}, b)$ 라 하면, 네 점 Q, R, S, T를 지나는 원의 방정식은 (2)에서와 같이

$$x^2 + \left(y - \frac{a+b+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - ab$$

이다. 근과 계수의 관계로부터

$$a+b = m+n-1, \quad ab = mn$$

이므로, 원의 방정식은

$$x^2 + \left(y - \frac{m+n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

이고, $n-m=20$ 이다. 이를 ①에 대입하면 $m+n \leq 200$ 이 성립한다. 따라서 가능한 순서쌍 (m, n) 은

$$(1, 21), (2, 22), \dots, (90, 110)$$

이다. 이 중에서 완전제곱수인 m 은 $m=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ 의 9가지이고, 완전제곱수인 n 은 $n=25, 36, 49, 64, 81, 100$ 의 6가지이다. 여기서 $(m, n)=(16, 36)$ 은 중복해서 발생하므로 $9+6-1=14$ 가지를 제외해야 한다.

따라서, 문제의 개수는 $90-14=76$ 이다.

[70]

(1) 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x) = -2px + q$ 이고 여기에 $x=0$ 을 대입하면, $g'(0)=q$ 가 된다. 따라서 포물선 $y=g(x)$ 위의 점 $R(0, r)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=qx+r$ 이 되고, x 절편은 $-\frac{r}{q}$ 이므로, $\alpha = -\frac{r}{q}$ 이 된다. 또한 포물선 $y=g(x)$ 위의 점 $R(0, r)$ 를 지나고 직선 PR에 수직인 직선의 방정식은 $y = -\frac{1}{q}x + r$ 이 되고, 이 직선의 x 절편은 qr 이므로, $\beta = qr$ 이

된다.

답: $\alpha = -\frac{r}{q}, \beta = qr$

(2) 제시문의 조건으로부터 다음이 성립한다.

- $B > C$
- $B^2 \leq B^2 + 4AC = 100$ 이므로, $B \leq 10$ 이고 B 는 짝수이다.
- A 와 C 는 $\frac{100-B^2}{4}$ 의 약수이다.
- $-\alpha\beta = r^2$ 이므로, 근과 계수의 관계로부터 $\frac{C}{A}$ 는 제곱수이다.

이로부터 가능한 순서쌍 (A, B, C) 는 아래의 표와 같이 두 쌍이 존재한다. 각 순서쌍에 대해 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근 α, β 를 구하고 (1)의 결과로부터 그에 대응하는 q, r 을 구할 수 있다.

B	AC	(A, B, C)	(α, β)	(q, r)
8	9	(3, 8, 3)	$(-\frac{1}{3}, 3)$	(3, 1)
6	16	(4, 6, 4)	$(-\frac{1}{2}, 2)$	(2, 1)

마지막으로 $q^2 + 4pr$ 가 완전제곱수가 되도록 하는 p 중에서 최소인 것을 구하면 아래 표에 있는 것과 같다.

(A, B, C)	(p, q, r)
(3, 8, 3)	(4, 3, 1)
(4, 6, 4)	(3, 2, 1)

(3) $g(x)=0$ 의 두 근 중에서 음수인 근을 γ 로 놓자. 선분 PR와, 곡선 $y=g(x)$ 및 x 축 ($x < 0$)으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}|\alpha|r - \int_r^0 (-px^2 + qx + r)dx = \frac{1}{2}|\alpha|r - \frac{p}{3}\gamma^3 + \frac{q}{2}\gamma^2 + r\gamma$$

와 같다. 이 도형의 넓이가 최소가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$, x 축($x < 0$), y 축($y > 0$)으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최대가 되어야 한다. 고정된 q 와 r 에 대하여, p 의 값이 최소일 때 이 넓이는 최대가 된다. 이제 (2)의 풀이에서 구한 표에 있는 순서쌍 (p, q, r) 로부터, $g(x)=0$ 의 음수인 근 γ 를 구하여, 위에서 구한 넓이 공식에 대입하면, 아래에 표에 있는 것과 같은 값을 얻는다.

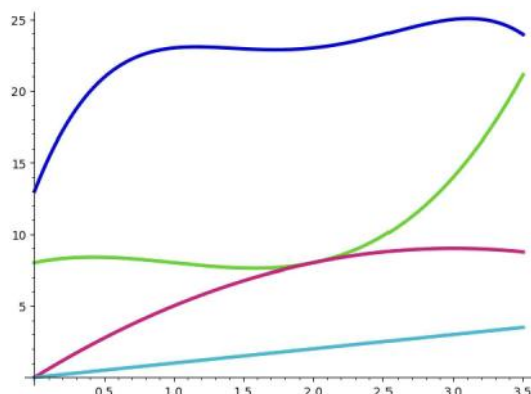
(A, B, C)	(p, q, r)	γ	넓이
(3, 8, 3)	(4, 3, 1)	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
(4, 6, 4)	(3, 2, 1)	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{108}$

이로부터 넓이가 최소가 되는 경우는 $(A, B, C)=(3, 8, 3)$ 인 경우이고, 이때, 넓이의 값

은 $\frac{1}{32}$ 임을 알 수 있다.

[71]

함수 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



(1) $h(x) = A(x) - D(x)$ 라 했을 때 $h(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다. $h'(x) = (3x+2)(x-2)$ 이므로 $h(x)$ 는 구간 $(0, 3.5)$ 에서 $x=2$ 일 때 최소가 된다. $h(2)=0$ 이므로 구간 $(0, 3.5)$ 에서 $h(x) \geq 0$ 을 얻는다. 즉 $D(x) \leq A(x)$ 이므로,
<제시문 2>의 조건에 의해 $g(x) \leq D(x) \leq A(x) \leq f(x)$ 가 되어 $g(x) \leq f(x)$ 가 성립한다.

(2) 모든 x 에 대해 $f(x) \geq A(x)$ 이므로, 함수 $k(x) = f(x) - A(x)$ 는 모든 x 에 대해 $k(x) \geq 0$ 이다. 한편 $k(1) = f(1) - A(1) = 8 - 8 = 0$ 이므로 $k(1)$ 은 $y = k(x)$ 의 최솟값이다. $y = k(x)$ 가 열린구간 $(0, 3.5)$ 에서 미분 가능한 함수이므로 $y = k(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극솟값을 가진다. 따라서 <제시문 1>에 의해 $k'(1) = f'(1) - A'(1) = 0$ 이므로 $f'(1) = -1$ 이다.

(3) 극한값이 존재하려면

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+3h) - g(a+5h)) = f(a) - g(a) = 0$$

이 되어야 한다. 따라서 $f(a) = g(a)$ 이고 (1)의 풀이에 의해 $a=2$ 가 된다. 이때, $f(2) = A(2) = D(2) = g(2)$ 이고 항상 $f(x) \geq A(x)$ 이므로 $f'(2) = A'(2) = 2$ 이다. 같은 방법으로 $g'(2) = D'(2) = 2$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2, \quad g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = 2$$

그러면 구해야 하는 극한값은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - g(2+5h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2+3h) - f(2)}{h} - \frac{g(2+5h) - g(2)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(3 \times \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} - 5 \times \frac{g(2+5h) - g(2)}{5h} \right) \\ &= 3f'(2) - 5g'(2) = 6 - 10 = -4 \end{aligned}$$

(4) 극한값이 존재하려면

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(b+4h) - g(b-3h) - 22) = f(b) - g(b) - 22 = 0$$

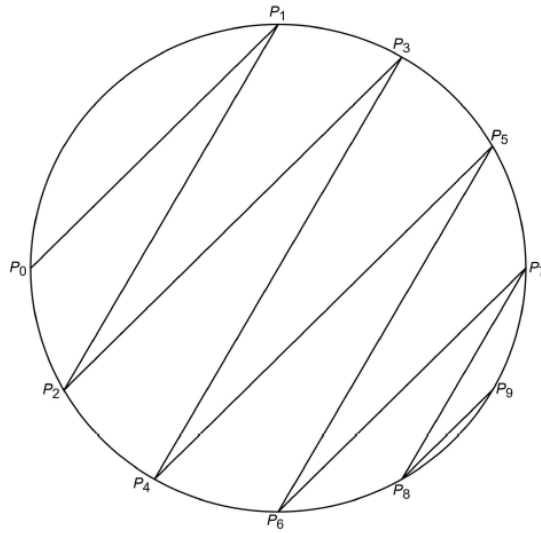
이 되어야 한다. 따라서 $f(b) - g(b) = 22$ 이 된다. 조건에 의해 $f(x) - g(x) \leq B(x) - C(x)$ 이다. 이제 함수 $p(x) = B(x) - C(x)$ 을 생각하자. $p'(x) = -4(x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로 구간 $(0, 3.5)$ 에서 $p(x)$ 의 최댓값은 $x=1$ 또는 $x=3$ 에서 얻어진다. 그런데 $p(1) = p(3) = 22$ 이므로 $b=1$ 또는 $b=3$ 을 얻는다.

여기서 $f(b) = B(b)$ 이고 $g(b) = C(b)$ 이고 항상 $f(x) \leq B(x)$ 와 $g(x) \geq C(x)$ 이 성립하므로 $f'(b) = B'(b)$ 와 $g'(b) = C'(b)$ 을 얻는다. 그런데 $B'(1) = B'(3) = 1$ 와 $C'(1) = C'(3) = 1$ 이므로 $b=1$ 와 $b=3$ 일 때 모두 $f'(b) = g'(b) = 1$ 이 된다. 따라서 구해야 하는 극한값은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+4h) - g(b-3h) - 22}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+4h) - g(b-3h) - f(b) + g(b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(b+4h) - f(b)}{h} - \frac{g(b-3h) - g(b)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(4 \times \frac{f(b+4h) - f(b)}{4h} - (-3) \times \frac{g(b-3h) - g(b)}{-3h} \right) \\ &= 4f'(b) + 3g'(b) = 7 \end{aligned}$$

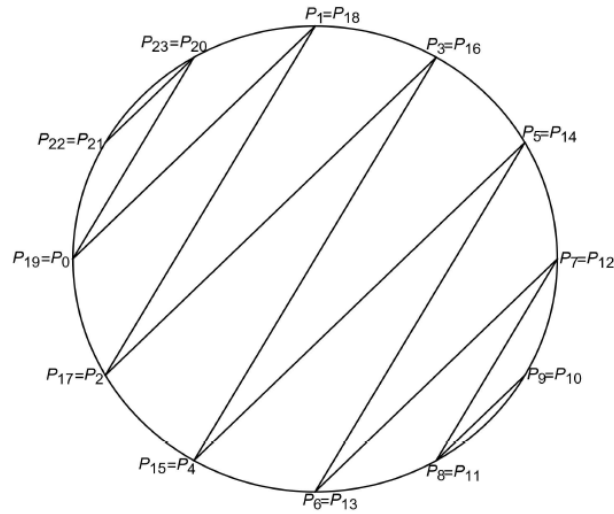
[72]

(1) 점 $P_0(-1, 0)$ 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_1\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{12}\right) = 1$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점은 $(0, 1)$ 이므로, 점 P_1 의 좌표는 $(0, 1)$ 임을 알 수 있다. 또한 n 이 홀수이면, 점 P_n 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_{n+1}\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{12}\right) = \sqrt{3}$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점이 P_{n+1} 이 된다. 만약 n 이 짝수이면, 점 P_n 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_{n+1}\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{12}\right) = 1$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점이 P_{n+1} 이 된다. 이로 부터 얻어지는 점들 $P_0, P_1, \dots, P_9$ 을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



선분 P_0P_1 이 x 축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$ 이고, 선분 P_1P_2 가 x 축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로, 호 P_0P_2 에 대한 원주각 $\angle P_0P_1P_2 = \frac{\pi}{12}$ 임을 알 수 있다. 따라서 호 P_0P_2 에 대한 중심각은 $\frac{\pi}{6}$ 가 되므로, 호 P_0P_2 의 길이도 $\frac{\pi}{6}$ 가 된다. 동일한 방법으로, $1 \leq n \leq 7$ 인 자연수 n 에 대하여, 호 P_nP_{n+2} 에 대한 원주각 $\angle P_nP_{n+1}P_{n+2} = \frac{\pi}{12}$ 가 되므로, 호 P_nP_{n+2} 에 대한 중심각은 $\frac{\pi}{6}$ 가 되고, 호 P_nP_{n+2} 의 길이 역시 $\frac{\pi}{6}$ 로 항상 일정하게 된다.

(2) 점 P_9 에서 그은 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선은 원과 접하게 되므로, $P_{10} = P_9$ 이 된다. 이제 점 P_{10} 에서 그은 기울기가 1인 직선은 원과 점 P_8 에서 만나게 되므로, $P_{11} = P_8$ 이 됨을 알 수 있다. 동일한 방법으로, $P_{12} = P_7$, $P_{13} = P_6$, $P_{14} = P_5$, $P_{15} = P_4$, $P_{16} = P_3$, $P_{17} = P_2$, $P_{18} = P_1$, $P_{19} = P_0$ 이 된다. 이제 점 P_{19} 에서 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선을 그어서 원과 만나는 점 P_{20} 을 얻고, 이 점에서 기울기가 1인 직선을 그어서 원과 만나는 점 P_{21} 을 얻는다. 점 P_{21} 에서 그은 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선은 원과 접하게 되므로, $P_{22} = P_{21}$ 이 된다. 점 P_{22} 에서 그은 기울기가 1인 직선은 원과 점 P_{20} 과 만나게 되므로, $P_{23} = P_{20}$ 이 됨을 알 수 있다. 동일한 방법으로, $P_{24} = P_{19} = P_0$, $P_{25} = P_{18} = P_1$, $P_{26} = P_{17} = P_2$, $P_{27} = P_{16} = P_3$, $P_{28} = P_{15} = P_4$, $P_{29} = P_{14} = P_5$, $P_{30} = P_{13} = P_6$, $P_{31} = P_{12} = P_7$, $P_{32} = P_{11} = P_8$, $P_{33} = P_{10} = P_9$ 이 된다. 이로부터 $P_{24+n} = P_n$ 임을 관찰할 수 있다. 점들 $P_0, P_1, \dots, P_{23}$ 을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



위에서 얻은 규칙과 $2024 = 24 \times 84 + 8$ 임을 감안하여, 같은 점들이 같은 열에 위치하도록 점 P_n 들을 다음 표에 있는 것과 같이 나열해 보자.

		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
P_{21}	P_{20}	P_{19}	P_{18}	P_{17}	P_{16}	P_{15}	P_{14}	P_{13}	P_{12}	P_{11}	P_{10}
P_{22}	P_{23}	P_{24}	P_{25}	P_{26}	P_{27}	P_{28}	P_{29}	P_{30}	P_{31}	P_{32}	P_{33}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_{2013}	P_{2012}	P_{2011}	P_{2010}	P_{2009}	P_{2008}	P_{2007}	P_{2006}	P_{2005}	P_{2004}	P_{2003}	P_{2002}
P_{2014}	P_{2015}	P_{2016}	P_{2017}	P_{2018}	P_{2019}	P_{2020}	P_{2021}	P_{2022}	P_{2023}	P_{2024}	P_{2025}

따라서 $P_{2024} = P_8$ 이므로 P_{2024} 의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 임을 알 수 있다.

(3) n 이 22보다 큰 경우에는 같은 모양의 도형이 계속 반복되므로, $n \leq 22$ 일 때, $A(n)$ 의 최댓값을 구하면 충분하다. $n = 8, 9, 20, 21$ 인 경우에는 $A(n) = 0$ 이 된다. $n \leq 22$ 이고, $n \neq 8, 9, 20, 21$ 이면, 선분 $P_n P_{n+1}$, 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$, 선분 $P_n P_{n+2}$ 로 둘러싸인 도형은 원에 내접하는 삼각형이 되므로, $A(n) = \frac{\overline{P_n P_{n+1}} \cdot \overline{P_{n+1} P_{n+2}} \cdot \overline{P_n P_{n+2}}}{4}$ 이 됨을 알 수 있다. (1)로부터, 호 $P_n P_{n+2}$ 의 길이가 일정하므로, 선분 $P_n P_{n+2}$ 의 길이도 일정하게 된다. 선분 $P_n P_{n+1}$ 의 길이는 이 선분이 지름이 되는 경우 (즉, 중심각이 π , 원주각이 $\frac{\pi}{2}$ 인 경우) 최대가 되고, 그 다음으로는 중심각이 $\frac{5\pi}{6}$, 즉 원주각이 $\frac{5\pi}{12}$ 인 경우임을 알 수 있다. 선분 $P_n P_{n+1}$ 이 지름이 되는 경우, 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$ 의 원주각이 $\frac{5\pi}{12}$ 임을 관찰할 수 있다. 또한 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$ 가 지름이 되는 경우에는, 선분 $P_n P_{n+1}$ 의 원주각이 $\frac{5\pi}{12}$ 임을 관찰할 수 있다. 따라서 선분 $P_n P_{n+1}$ 또는 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$ 가 지름이 되는 경우 (즉, $n = 2, 3, 14, 15$),

$A(n)$ 은 최대가 된다. 이제 삼각형 $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 를 지름을 밑변으로 하는 삼각형으로 볼 때,
 $A(n) = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로, $A(n)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이 된다.

[73]

(1) $px^2 + qx + r = f(x) = g'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ 로부터 $p = 3$ 이다.

수열 $S_n = f(n)$ 이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이라고 할 때,

$$S_n - S_{n-1} = a_n = f(n) - f(n-1) = 6(n-1) + q + 3 = 6n + q - 3 \quad (n \geq 2 \text{ 일 때})$$

이 성립하므로 공차는 6이다. 또한, $a_1 = S_1 = f(1)$ 이므로,

$$a_1 = 3 + q = f(1) = 3 + q + r$$

를 얻게 되고, $r = 0$ 이다. 한편, 함수 $y = h(x)$ 의 조건으로부터

$$g'(0) = 0 = g'(6) = 108 + 6q$$

를 얻게 되어, $q = -18$ 이고, $h(6) = h(0) + h(6)$ 로부터 $C = h(0) = 0$ 이다. 따라서, 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는

$$f(x) = 3x^2 - 18x, \quad g(x) = x^3 - 9x^2$$

이다. 이로부터 정적분 값을 구하면

$$\int_0^6 g(x) dx = \int_0^6 x^3 - 9x^2 dx = -324$$

와

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 (x^3 - 9x^2) dx = -20$$

이고 $g(6) - g(0) = -108$ 이므로,

$$\int_0^8 h(x) dx = -324 - 20 - 108 \times 2 = -560$$

이다.

(2) 두 실수 α, β 는 $f(x) = px^2 + qx + r = 0$ 의 해이고 $r \neq 0$ 이므로, 모두 0이 아니다. 또한 α, β 는 삼차방정식

$$g(x) - f(x) = (x^3 + qx^2 + px + r) - (px^2 + qx + r) = x(x^2 + (q-p)x - (q-p)) = 0$$

의 해가 되므로, 이차방정식

$$x^2 + (q-p)x - (q-p) = 0$$

의 해가 되어, $\alpha + \beta = \alpha\beta = p - q$ 가 성립한다. 한편, $\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$, $\alpha\beta = \frac{r}{p}$ 가 성립하므로,

$$\alpha + \beta = \alpha\beta = p - q = -\frac{q}{p} = \frac{r}{p}$$

를 얻을 수 있고, 이로부터 $r = -q$ 이다. 또한, $p - q = -\frac{q}{p}$ 로부터 $p^2 = q(p-1)$ 을 얻게 되

고, $p \neq 1$ 임을 알 수 있다. 양변을 $p-1$ 로 나누면 $q = \frac{p^2}{p-1} = p+1 + \frac{1}{p-1}$ 를 얻게 되고, q 는 정수이므로 $p=2$ 이다. 따라서, $(p, q, r) = (2, 4, -4)$ 을 얻게 되어

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 4, \quad g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 4$$

이고, $\alpha = -1 - \sqrt{3}$, $\beta = -1 + \sqrt{3}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 정적분은

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx &= \int_{\alpha}^0 x(x^2 + 2x - 2) dx - \int_0^{\beta} x(x^2 + 2x - 2) dx \\ &= -\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) - \frac{2}{3}(\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

이다. $\alpha + \beta = \alpha\beta = -2$ 로부터

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8, \quad \alpha^3 + \beta^3 = -20, \quad \alpha^4 + \beta^4 = 56$$

을 얻게 되어, 문제의 정적분의 값은 $\frac{22}{3}$ 임을 알 수 있다.

(3) $A+B=0$, $AB=9C$ 가 성립하므로, 삼차함수 $g(x) = x^3 + Ax^2 - Ax - \frac{A^2}{9}$ 이다.

이차방정식 $g'(x) = 3x^2 + 2Ax - A = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로, 판별식 $D = A^2 + 3A > 0$ 이 성립해야 하고, 이로부터 $A > 0$ 또는 $A < -3$ 이다.

이때, 이차방정식 $g'(x) = 0$ 의 두 근 $\frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 3A}}{3}$ 을 각각 a, b (단, $a < b$)라 하면,

$$a+b = -\frac{2A}{3}, \quad ab = -\frac{A}{3}$$

이 성립한다. 한편,

$$\begin{aligned} g(a) &= a^3 + Aa^2 - Aa - \frac{A^2}{9} \\ &= g'(a)\left(\frac{a}{3} + \frac{A}{9}\right) - \frac{2}{9}A(A+3)a \\ &= -\frac{2}{9}A(A+3)a > 0 \end{aligned}$$

이 되어 $a < 0$ 이다. 동일한 방법으로 $g(b) = -\frac{2}{9}A(A+3)b < 0$ 으로부터 $b > 0$ 을 얻게 되어, $A = -3ab > 0$ 을 얻을 수 있다. 마지막으로,

$$\begin{aligned} 24\sqrt{6} &= g(a) - g(b) \\ &= (a^3 - b^3) + A(a^2 - b^2) - A(a - b) \\ &= (a - b)((a^2 + ab + b^2) + A(a + b) - A) \\ &= \frac{4}{27}A(A+3)\sqrt{A(A+3)} \end{aligned}$$

을 얻게 되어 $A(A+3) = 54$ 이다. 따라서, $A = 6$ 이다.